

Épreuves orales des concours d'entrée aux grandes écoles 2024

Écoles Normales Supérieures – PC

Algèbre

1. *a)* Soit $X \subset \mathbb{N}$ telle que 0 et 1 appartiennent à X et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Card}(X \cap \llbracket 0, n \rrbracket) = 0$.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $j \in \mathbb{N}$ telle que $\text{Card}(X \cap \llbracket j, j+k \rrbracket) = 2$.

b) Montrer qu'il existe 100 entiers consécutifs contenant exactement 5 nombres premiers.

2. Soient deux réels a et b . On pose $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + X$. On suppose que les racines de P sont toutes distinctes deux à deux et qu'elles appartiennent à un même cercle du plan complexe. Montrer que $3 < ab < 9$.

3. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ de degré ≥ 2 et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = XP'_n$. Montrer qu'il existe une suite de réels positifs $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les racines complexes de P_n appartiennent au disque de centre 0 et de rayon λ_n .

4. Soit E l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients 0 ou 1 qui sont inversibles. Quel est le nombre maximal de 1 d'un élément de E ?

5. On dit qu'une matrice est positive si tous ses coefficients sont positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre :

(i) A est monotone, c'est-à-dire A est inversible et A^{-1} positive,

(ii) $\forall X \in \mathbb{R}^n, AX \geq 0 \Rightarrow X \geq 0$.

6. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall A \in E, \text{rg}(A) \leq 1$. Montrer que $\dim(E) \leq n$.

7. Déterminer les $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Caractériser les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotentes d'indice $n - 1$.

9. Existe-t-il deux matrices N et P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $N^2 = 0$, $P^2 = P$, NP est nilpotente et $(NP)^2 \neq 0$?

10. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = 0$. Montrer qu'il existe une unique matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $X + MX + XM^2 = M$.

11. On pose $A_0 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 5/4 \end{pmatrix}$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = 2A_n - A_n^2$. Déterminer la limite de $(\det(A_n))$ quand $n \rightarrow +\infty$.

12. On pose $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} A_n & I_{2^n} \\ \hline I_{2^n} & A_n \end{array} \right)$. Montrer que A_n admet $(n+1)$ valeurs propres $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ d'ordres respectifs $\binom{n}{k}$ pour $0 \leq k \leq n$.

13. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x) dx$. Montrer que $M = (\langle X^i, X^j \rangle)_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2}$ est inversible.

14. Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels.

Pour des polynômes $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a_k) Q^{(k)}(a_k)$.

a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer qu'il existe une base $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, orthonormée pour ce produit scalaire et telle que, pour chaque $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, le polynôme P_i soit de degré i et à coefficient dominant strictement positif.

c) Déterminer $P_k^{(k)}(a_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

d) On suppose $a_0 = \dots = a_n = a$. Déterminer les polynômes P_k .

15. Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \dots, f_k)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \exists i \in \{1, \dots, k\}, \langle x, f_i \rangle > 0$.

a) Donner un exemple de famille de $\mathbb{R}^n$ vérifiant cette propriété.

a) Montrer que $(f_1, \dots, f_k)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

16. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En notant $(s_1, \dots, s_n)$ les valeurs propres de M , on pose

$$N_p(M) = \left(\sum_{i=1}^n |s_i|^p \right)^{1/p}.$$

a) Montrer que $(A, B) \mapsto \text{tr}(AB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En déduire que N_2 est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $N_1(M) = \sup\{|\operatorname{tr}(MO)|, O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$. En déduire que N_1 est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

17. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de A sont imaginaires pures.

b) Que dire de $\det(A)$ si n est impair ?

c) On suppose n pair et on considère la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Montrer que $\det(A + J) = \det(A)$

18. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2}$ vérifiant $\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, a_{i,j} \in \{0,1\}$. On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^T A = kI_n + J$. Montrer que A est inversible.

19. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^T$.

a) Quelles sont les valeurs propres complexes possibles de A ?

b) Donner un exemple de matrice A qui vérifie $A^2 = A^T$ et qui possède toutes les valeurs propres possibles trouvées à la question précédente.

20. a) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer que les assertions sont équivalentes :

(i) S admet k valeurs propres positives (comptées avec multiplicité),

(ii) il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que $\dim F = k$, $\dim G = n - k$ et $\forall X \in F, X^T S X \geq 0$ et $\forall Y \in G, Y^T S Y \leq 0$.

b) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Soit $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $P^T S P$ et S ont le même nombre de valeurs propres positives.

21. a) Montrer que toute matrice symétrique positive admet une racine carrée.

b) Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement s'il existe S symétrique définie positive telle que $SA = A^T S$.

22. Soit E un espace euclidien. Soit a un endomorphisme autoadjoint de E . Soient $u \in E$ non nul et $V = \operatorname{Vect}\{a^k(u) ; k \in \mathbb{N}\}$. Montrer que l'endomorphisme induit par a sur V n'a que des valeurs propres simples.

Analyse

23. Soit A un ensemble de $\mathbb{R}^2$. On dit que $x, y \in A$ sont connectés si et seulement s'il existe $f \in C^0([0,1], A)$ telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$.

a) Montrer que tous les points de $\mathbb{R}^2$ sont connectés.

b) Déterminer les points connectés de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

c) Déterminer les points connectés de $\mathbb{R}^2 \setminus \{x, \|x\| = 1\}$.

d) Déterminer les points connectés de $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{B}_o(i, \varepsilon)$ où $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.

24. On considère $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \sup_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} |\lambda|$, où le spectre est pris sur $\mathbb{C}$. L'application

f est-elle lipschitzienne ?

25. On pose $a_1 \geq 0$ puis $a_{n+1} = 10^n a_n n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. À quelle condition sur a_1 la suite (a_n) tend-elle vers 0 ?

26. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$. Donner un équivalent de $f(n)$.

27. Étudier les suites u et v telles que $u_0 = v_0 = 0$ et $u_1 = v_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n + cu_{n-1} + dv_{n-1} \\ v_{n+1} = a'u_n + b'v_n + c'u_{n-1} + d'v_{n-1} \end{cases}$$
 avec toutes les constantes réelles.

28. Pour $a \in \mathbb{R}$, soit (u_n) définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $\forall n, x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$.

a) Pour quelles valeurs de a a-t-on $\forall n, u_n \in [0, 1]$? Que peut-on dire alors de la suite (x_n) ?

b) Montrer que, si $a \in [1, 2]$, alors x_n tend vers $\frac{a-1}{a}$.

c) On suppose que $a \in [2, 3]$ et que (x_n) converge. Quelle est la limite de (x_n) ?

29. Soit $(p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs ou nuls telle que $p_{i,j} = 0$ si $j > i$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=0}^n p_{n,j} = 1$. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

i) pour chaque $j \in \mathbb{N}$, la suite $(p_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0,

ii) pour toute suite convergente $(s_n)_{n \geq 0}$ de limite S , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n p_{n,j} s_j = S$.

30. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $u_0 \neq u_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \frac{u_n - u_{n-1}}{f(u_n) - f(u_{n-1})} f(u_n)$.

a) Montrer que, si u_0 et u_1 sont assez petits, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b) Sous les hypothèses de a), déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

31. Pour $c \in \mathbb{C}$, on définit la suite (z_n) par $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C}, (z_n) \text{ est bornée}\}$.

a) Montrer que, si $|c| \leq 1/4$, alors $c \in \mathcal{M}$.

b) Montrer que, si $|c| \geq 3$, alors $c \notin \mathcal{M}$.

c) Discuter de l'ensemble $\mathcal{M} \cap \mathbb{R}$.

32. Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles. Soit $S \in \mathbb{R}$. On suppose que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$; (ii) la série $\sum b_n$ diverge; (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = S$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 + \dots + a_n}{b_0 + \dots + b_n} = S$.

33. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = A$. Quelles sont les valeurs

que peut prendre $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$?

34. Soit $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $g(0) = g'(0) = 0$ et $g''(0) > 0$. Pour $\lambda > 0$, on pose $A_\lambda = \{x > 0, g(x) = \lambda x\}$. Montrer qu'il existe $\mu > 0$ tel que $\forall \lambda \in]0, \mu], A_\lambda \neq \emptyset$.

35. Soient $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que $f + g$ est croissante. Montrer que $f([0, 1])$ est un intervalle.

36. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t)^2 = f(t\sqrt{2})$.

37. Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continues. On suppose $f \circ g = g \circ f$ et g croissante. Montrer que f et g admettent un point fixe commun.

38. Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$ telles que :
 $\forall (x, y) \in [-1, 1]^2, f(x) - f(y) \geq f(x)^2(x - y)$.

39. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(7x + 1) = 49f(x)$.

40. Soit $f : t \mapsto \sum_{k=1}^N a_k \sin(2\pi kt)$ où les a_k sont des nombres réels avec $a_N \neq 0$. On note N_j le nombre de racines comptées avec multiplicité (notion qu'on admettra) de $f^{(j)}$ sur $[0, 1]$. Montrer que $(N_j)_{j \geq 0}$ est une suite croissante qui tend vers $2N$.

41. Soit $V = \{f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R}) ; f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1\}$. Trouver tous les réels α tels que : $\forall f \in V, \exists x \in [0, 1], f(x) + \alpha = f'(x)$.

42. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$ et f telle que $f'(t) - f(t) = g(t)$. On pose $a = f(0)$. Montrer qu'il existe une unique valeur a pour laquelle $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

43. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ ne prenant pas les valeurs 0 et 1.

On suppose que $\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(x) - 1}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

44. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-lipschitzienne, $\lambda \in]0, 1[$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne telle que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = f(x) + \lambda F(x + a)$.

45. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On pose $f_a : x \mapsto f(x + a)$ et $F_f = \text{Vect}(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$.

a) Trouver f telle que F_f est de dimension finie. Préciser la dimension.

b) Montrer que, si F_f est de dimension finie, alors $F_{f'}$ est aussi de dimension finie.

c) Trouver les fonctions f telles que $\dim F_f = 1$.

d) Trouver les fonctions f telles que $\dim F_f = 2$.

46. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. On pose, pour $t \in \mathbb{R}^+$, $\lambda(t) = \max_{x \in \mathbb{R}} (|f(x)| \exp(-tx^2))$.

a) On suppose $f(0) \neq 0$. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t)$.

b) On suppose maintenant $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent de λ en $+\infty$.

c) Même question en supposant la fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0$ et $f^{(k)}(0) \neq 0$.

47. On dit que (x_n) converge au sens de Cesàro vers ℓ lorsque $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient la propriété suivante : pour toute suite réelle (x_n) , si la suite (x_n) converge au sens de Cesàro vers ℓ , alors la suite $(f(x_n))$ converge au sens de Cesàro vers $f(\ell)$.

48. Soit g une fonction $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = g'(0) = 0$ et $g''(0) > 0$. On pose, pour λ dans $\mathbb{R}^{+*}$, $A(\lambda) = \{x > 0, g(x) = \lambda x\}$.

a) Montrez qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que, pour tout λ dans $]0; \lambda_0[$, $A(\lambda) \neq \emptyset$.

b) On pose $\lambda^* = \sup\{\lambda > 0, A(\lambda) \neq \emptyset\}$ (cela peut être $+\infty$). Montrer que, pour tout λ dans $]0; \lambda^*[$, $A(\lambda)$ est non vide.

c) On pose $X_\lambda = \inf\{x > 0, g(x) = \lambda x\}$ quand c'est défini. Montrer que $X_\lambda \neq 0$.

d) En toute généralité, la fonction $h : \lambda \mapsto X_\lambda$ est-elle continue sur $]0; \lambda^*[$?

e) Montrer que cette fonction h est continue au voisinage de 0.

49. Soit $M \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. On suppose que, pour tout t , $M(t)$ est inversible. L'objectif est de montrer que $\frac{d}{dt}(\det(M(t))) = \det(M(t)) \operatorname{tr}\left(M(t)^{-1} \frac{d}{dt}(M(t))\right)$.

a) Le montrer si M est diagonale.

b) Montrer que $\forall U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\det(I_n + \varepsilon U) - \det(I_n)}{\varepsilon} = \operatorname{tr}(U)$.

c) On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $M(t_0) = I_n$. Montrer la relation en t_0 .

d) Traiter le cas général.

50. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $f_a : x \mapsto f(a+x)$ et $F_f = \operatorname{Vect}(f_a, a \in \mathbb{R})$.

a) Si F_f est de dimension finie, montrer que F_f , l'est aussi.

b) Quelle est la dimension de F_f lorsque $f = \exp$?

c) Réciproquement, montrer que si $\dim(F_f) = 1$, alors $f = \exp$.

51. On suppose $e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Montrer que $q \int_0^1 x^n e^x dx \in \mathbb{N}^*$. Conclure.

Adapter la preuve précédente pour prouver $e^2 \notin \mathbb{Q}$.

52. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que $x \mapsto f(x) + \int_0^x f(t)dt$ tend vers le réel ℓ en $+\infty$. Montrer que f possède une limite en $+\infty$ que l'on déterminera.

53. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ et intégrable telle que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x)f(1-x) = 1$.
Montrer que $\int_0^1 f \geq 1$.

54. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = 0$. Montrer que $\left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \frac{1}{8} \|f'\|_\infty$.

55. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

a) On suppose que $\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que $\frac{f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t) dt} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

b) On suppose que $\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$. Que dire de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t) dt}$?

56. Soit (P_n) une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [-1, 1]} |P_n(x) - e^x| = 0$.
Montrer que $\deg(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

57. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur $[0, +\infty[$ par $f_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 1$ et $f'_{n+1}(x) = e^x \sqrt{f_n(x)}$. Justifier l'existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et déterminer sa valeur.

58. Encadrer et donner un équivalent en $+\infty$ de $S : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k!}}$.

59. a) Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On note γ sa limite.

b) Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Calculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Donner un développement asymptotique de $\ln(\Gamma(n+1))$ à la précision $O(\ln(n))$. En considérant la fonction $\Psi : x \mapsto \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, montrer que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

Ind. On admet que l'on peut « dériver » le développement précédent c'est-à-dire que $\Psi(n+1) = \ln(n) + O(1/n)$.

d) Montrer que Ψ est croissante et justifier le développement admis précédemment.

60. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues. On suppose qu'il existe des constantes $C_1, C_2, a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \frac{C_1}{(1+|x|)^a}$ et $|g(x)| \leq \frac{C_2}{(1+|x|)^b}$.

Lorsque c'est possible, on pose $f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y) dy$.

a) À quelle condition sur C_1, C_2, a, b la fonction $f * g$ est-elle définie sur $\mathbb{R}$?

b) On suppose maintenant a et b strictement supérieurs à 1. Montrer qu'il existe $C_3 > 0$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, |f * g(x)| \leq \frac{C_3}{(1 + |x|)^{\min(a,b)}}$.

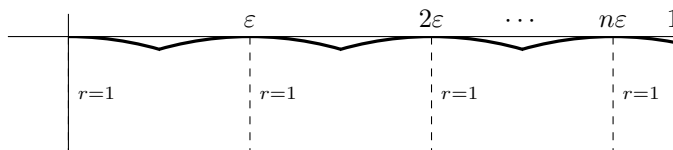
61. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ bornées sur $\mathbb{R}^2$ et telles que $f = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y}$.

62. Montrer que la fonction $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto f(P) = \int_0^1 (P(x) - e^x)^2 dx$ admet un unique point critique.

Géométrie

63. Montrer qu'un polygone à n sommets inscrit dans le cercle unité est d'aire maximale si et seulement s'il est régulier.

64. Soit $\varepsilon \in]0; 1[$. Soit n le plus grand entier naturel tel que $n\varepsilon \leq 1$. On trace les cercles de rayon 1 et de centres $(k\varepsilon, -1)$ pour $0 \leq k \leq n$. Donner un développement limité de la somme des longueurs des arcs de cercle (voir figure).



Probabilités

65. On considère une urne contenant $n \geq 2$ boules : 2 boules sont rouges et les $n - 2$ autres sont blanches. On tire les boules une par une sans remise. On s'arrête une fois qu'on a tiré les deux boules rouges. En moyenne, combien reste-t-il de boules dans l'urne ?

66. On considère une urne vide qu'on remplit successivement d'une boule blanche (avec une probabilité p) ou d'une boule rouge (avec une probabilité $1 - p$). On arrête de la remplir lorsqu'on obtient la première boule rouge. Puis on la vide jusqu'à tirer la boule rouge. Déterminer le nombre moyen de boules blanches restantes à la fin.

67. On dispose d'une urne vide. On ajoute des boules une par une et on s'arrête dès qu'on a ajouté une boule rouge. La probabilité d'ajouter une boule rouge est à chaque étape est égale à $\frac{1}{m}$, avec $m \in \mathbb{N}^*$. On mélange ensuite les boules et on les retire une à une jusqu'à retirer la boule rouge. Calculer l'espérance du nombre de boules restantes.

68. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour A partie de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $M(A)$ la matrice carrée de taille n à coefficients dans $\{0, 1\}$ caractérisée par $\forall (i, j), M(A)_{i,j} = 1 \iff (i, j) \in A$. On considère

l'ensemble P des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal n et une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur P . Quelle est la probabilité que $M(X)$ soit inversible ?

69. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$. Déterminer $\mathbf{E}(M_n^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. *Ind.* Distinguer selon la parité de k .

70. Soient, pour $\lambda > 0$, $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda, D_\lambda$ quatre variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre λ .

a) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda \text{ n'a que des racines réelles})$.

b) Même question pour $A_\lambda X^3 + B_\lambda X^2 + C_\lambda X + D_\lambda$.

71. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ensemble S_n des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ de la probabilité uniforme. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Pour $\sigma \in S_n$, on note

$P_k(\sigma) = \{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k, i_1 < i_2 < \cdots < i_k \text{ et } \sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \cdots < \sigma(i_k)\}$ l'ensemble des sous-suites croissantes de longueur k de la permutation σ .

Déterminer l'espérance de $\text{Card}(P_k)$.

72. Soient $\lambda \in [0, 1]$, $(X_{k,n})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ n \geq 1}}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, où

$X_{k,n}$ suit la loi $\mathcal{B}(\lambda/n)$. On pose $X_n = X_{1,n} + \cdots + X_{n,n}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(\exp(tX_n))$.

73. On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs réelles est infiniment divisible si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des variables aléatoires $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$ indépendantes et de même loi telles que $X \sim X_{1,n} + \cdots + X_{n,n}$.

a) Donner des exemples de variables aléatoires indéfiniment divisibles.

b) Soit X une variable aléatoire infiniment divisible non nulle telle que $\mathbf{E}(X) = 0$ et $\mathbf{E}(X^2) < +\infty$. Montrer que, pour tout $A > 0$, $\mathbf{P}(X > A) > 0$.

74. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2}$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$.

Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(P(M_n)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(x) P(x) dx$.

75. On note $D(X)$ le nombre de diviseurs premiers de X , où X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(D(X))$.

b) On admet que $\sum_{\substack{p \text{ premier, } p \leq n}} \frac{1}{p} \sim \ln(\ln n)$. Montrer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{D(X)}{\ln(\ln n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.

76. Soient $C \in \text{GL}_q(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ nilpotente. Soit $p \in]0, 1[$. On définit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $B_0 = I_n$ et $B_{n+1} = A_n B_n$, où $\mathbf{P}(A_n = C) = p$ et $\mathbf{P}(A_n = N) = 1 - p$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(B_n \neq O)$.

77. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique.

Soient $\theta \in]-\pi, \pi]$ et $p \in]0, 1[$. On note $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit (u_n) une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^2$ avec $u_0 = (1, 0)^T$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(u_{n+1} = R(\theta)u_n) = p$ et $\mathbf{P}(u_{n+1} = Mu_n) = 1 - p$. Déterminer la limite de $(\mathbf{E}(\|u_n\|))$ pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$ puis pour θ quelconque.

78. Soit $\theta \in [0; 2\pi]$. Soit $p \in]0; 1[$. On pose $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Les variables aléatoires $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes et vérifient $\mathbf{P}(A_n = R) = p$ et $\mathbf{P}(A_n = Q) = 1 - p$. On note $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = A_n U_{n-1}$.

On note $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ les instants n successifs où $A_n = Q$.

a) Trouver la loi de $\|U_{t_1}\|$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique.

b) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, donner une approximation du nombre d'indices i tels que $t_i \leq N$.

Dans toute la suite, on suppose que $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

c) Calculer $\mathbf{E}(\ln \|U_{t_1}\|)$.

d) Déterminer la loi de $\|U_{t_2}\|$.

e) Déterminer la loi de $\|U_{t_k}\|$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

f) Déterminer $\mathbf{E}(\ln \|U_{t_k}\|)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

École Polytechnique - ESPCI – PC

Algèbre

79. Un graphe est un couple $G = (S, A)$ où S est un ensemble fini et A un ensemble de paires de S . Les éléments de S s'appellent les sommets de G et ceux de A les arêtes de G . Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ deux graphes et f une application de S dans S' . On dit que f est un morphisme de G dans G' si $\forall (u, v) \in S^2, \{u, v\} \in A \Rightarrow \{f(u), f(v)\} \in A'$. On dit que f est un isomorphisme de G dans G' si

$$\forall (u, v) \in S^2, \{u, v\} \in A \iff \{f(u), f(v)\} \in A'.$$

Donner une majoration du nombre de graphes à n sommets et k arêtes deux à deux non isomorphes.

80. Soient $n \geq 2$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un entier $i \in [0, n]$ tel que l'on ait

$$\left| \sum_{k=0}^i a_k - \sum_{k=i+1}^n a_k \right| \leq \sup_{0 \leq k \leq n} |a_k|.$$

81. Soit $P = X^2 + c_1 X + c_0$ à coefficients dans $\mathbb{N}$. Déterminer les suites d'entiers naturels (a_n) telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(a_n) = a_{n+1} a_{n+2}$.

82. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ pour lesquelles il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{N}$, unitaire et de degré k tel que $\forall n \in \mathbb{N}, P(a_n) = \prod_{j=1}^k a_{n+j}$.

83. Soient A et B deux éléments de $\mathbb{R}[X]$ dont toute combinaison linéaire réelle est scindée ou nulle, x et y deux racines de A telles que $x < y$. Montrer que B a une racine dans $[x, y]$.

84. Calculer $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} \frac{1}{2 - z}$.

85. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soient $u_1, \dots, u_n$ des nombres complexes de module 1. Montrer que $\prod_{i \neq j} |u_i - u_j|^{\frac{1}{n(n-1)}} \leq n^{\frac{1}{n}}$.

86. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le module de $\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(2i\pi \frac{k^2}{n}\right)$.

87. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que le polynôme $\operatorname{Re}(P(X + ia))$, polynôme dont les coefficients sont les parties réelles du polynôme $P(X + ia)$, est scindé sur $\mathbb{R}$.

88. On note $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1\}$ et $\|P\| = \sup_{z \in \mathbb{D}} |P(z)|$ pour $P \in \mathbb{C}[X]$. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on définit la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ en posant $P_0 = P$ puis $P_{n+1} = (P'_n)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que, si $\|P\| < \varepsilon$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n\| = 0$.

89. Soit F un polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $F(n)$ ne soit pas premier.

90. Montrer que $\mathbb{R}^n$ ne s'écrit pas comme réunion finie de sous-espaces vectoriels stricts.

91. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour n'importe quelle permutation de ses n^2 coefficients, on obtienne toujours une matrice inversible.

92. Soient E et F deux $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels. Une application $f : E \rightarrow F$ est dite antilinéaire si $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, f(x + \lambda y) = f(x) + \bar{\lambda}f(y)$. Pour quels entiers n existe-t-il $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ antilinéaire telle que $f \circ f = -\operatorname{id}$?

93. Soient $n \geq 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$. Trouver les valeurs propres de A et leurs multiplicités.

94. Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A = (a_i + \delta_{i,j} b_j)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Calculer $\det(A)$.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

95. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes ;

(i) A et B admettent au moins une valeur propre commune,

(ii) il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $PA = BP$.

96. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = -I_n$. Montrer que A et B sont semblables.

97. Soit n un entier naturel impair. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB + BA = A$. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun. Le résultat persiste-t-il pour n pair ?

98. Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que AB est diagonalisable.

a) Est-ce que BA est diagonalisable ?

b) Montrer que :

$$\dim(\text{Ker}(AB)) \leq \dim(\text{Ker}(B(AB)A)) \leq \dim(\text{Ker}(A(BABA)B)) \leq \dim(\text{Ker}(AB)).$$

c) Est-ce que $(BA)^2$ est diagonalisable ?

99. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres complexes de A ont une partie réelle strictement négative et que celles de B ont une partie réelle négative. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $C = AM + MB$.

100. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soient S et S' diagonalisables, N et N' nilpotentes. On suppose $NS = SN$ et $N'S' = S'N'$ et $S + N = S' + N'$. Montrer que $S = S'$ et $N = N'$.

101. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple (B, C) de matrices symétriques positives telles que $A = B - C$ et $BC = CB = 0$.

102. a) Montrer que toute matrice réelle de taille n symétrique positive admet une racine carrée symétrique positive.

b) Soient S et A deux matrices de taille n avec S symétrique définie positive et A antisymétrique. Montrer que AS est $\mathbb{C}$ -diagonalisable.

103. Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi_k(H) = \sum_{i=0}^{k-1} A^i H A^{k-1-i}$.

a) Montrer que φ_k est un endomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

b) À quelle condition φ_k est-elle injective ? surjective ? bijective ?

104. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), f(M) \geq 0$. Montrer que f est une combinaison linéaire des formes linéaires $\varphi_X : M \mapsto X^T M X$ avec $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

105. Soit n un entier naturel impair. Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $C(A)$ (resp. $C(B)$) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec A (resp. B).

Montrer que $C(A) \cap C(B) = \mathbb{R}I_n$ si et seulement si il n'existe pas deux sous-espaces F et G de $\mathbb{R}^n$, stables par A et B , de dimension ≥ 1 , tels que $F \oplus G = \mathbb{R}^n$.

106. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ deux matrices dont les valeurs propres sont strictement supérieures à 1. Montrer que les valeurs propres de AB sont strictement supérieures à 1.

Analyse

107. On note E l'ensemble des polynômes non nuls à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et A l'ensemble des racines des polynômes appartenant à E . Déterminer l'adhérence de A .

108. Chercher les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bijective, continue, dont la réciproque est continue et telle que, pour toute droite $\mathcal{D}$, $f(\mathcal{D})$ est une droite.

109. Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|f - P_0\|_\infty = \min\{\|f - P\|_\infty, P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

110. Soient $n \in \mathbb{N}$, $a < b$ deux réels, $I = [a, b]$ et $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ dans I . On note P_j l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n qui vaut 1 en x_j et 0 en chaque x_i pour $i \neq j$. Pour $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ et $t \in I$, on note $L(f)(t) = \sum_{j=0}^n f(x_j)P_j(t)$ et $\varphi(t) = \sum_{j=0}^n |P_j(t)|$. Montrer que $\|L(f)\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \|f\|_\infty$ et étudier le cas d'égalité.

111. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, c'est-à-dire telle que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^n$, $t \mapsto f(u + vt)$ est convexe. Montrer que f est continue.

112. Soit E une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ telle que $B(0, 1) \subset E$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(E) \subset E$. Montrer que $|\det(M)| \leq 1$.

113. Soit $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $p = \text{rg}(A(t_0))$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in [t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon]$, on ait $\text{rg}(A(t)) \geq p$.

114. On note $a = \sqrt{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \frac{1}{n} \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ a < \frac{k}{n} < a+1}} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n} - a}}$. Étudier la convergence de la suite (S_n) .

115. Pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = x^n + x^{1/n}$. Soit $a \in \mathbb{R}^{++}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique x_n tel que $f_n(x_n) = a$. Étudier la limite de (x_n) en fonction de a .

116. Étudier la nature de $\sum u_n$ où $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

117. Soit (a_n) une suite de réels de $]0, 1[$ telle que la série $\sum \frac{a_n}{\ln(1/a_n)}$ converge. Montrer que la série $\sum \frac{a_n}{\ln(n)}$ converge.

118. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe vérifiant, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^n a_k$.

a) Trouver α tel qu'il existe C vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n| \leq Cn^\alpha$

b) On suppose $a_0 > 0$. Montrer que $\sum a_n$ diverge.

119. Prouver que la série de terme général 2^{-2^n} converge et que sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-2^n}$ est irrationnelle.

120. Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ converge. Soit (u_n) une suite réelle. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{\sum_{k=0}^n a_k u_{n-k}}{\sum_{k=0}^n a_k}$.

a) Montrer que, si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum v_n$ converge.

b) Est-ce toujours le cas si $\sum u_n$ ne converge pas absolument ?

121. Soit $f \in [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\int_0^{+\infty} |f'(t)| dt$ converge. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si $\sum f(n)$ converge.

122. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer l'inégalité $\prod_{i=1}^k (1+x_i^k) \geq \left(1 + \prod_{i=1}^k x_i\right)^k$.

123. Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b, f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

124. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in]0, 1[$ distinct de $\frac{1}{n+2}$.

a) Trouver toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ telles que, pour tous réels a et b , on ait

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\lambda b + (1-\lambda)a).$$

b) Étudier le cas $\lambda = \frac{1}{n+2}$.

125. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels et $P : x \mapsto \sum_{k=1}^n a_k \sin(kx)$. Pour tout entier $r \in \mathbb{N}$, on suppose que $(-1)^r P^{(2r)}$ est positive sur $[0; \pi]$. Montrer que P est la fonction $x \mapsto a_1 \sin(x)$.

126. Soit $(u_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ une suite doublement indexée à valeurs complexes. On suppose que, pour toute suite complexe $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n u_{k,n} = 0$.

Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{k,n}| = 0$.

127. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 2\pi], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(2\pi)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $k \in [0; n]$, on a $\int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt = 0$. Quel est le nombre minimal d'annulations de f ?

128. Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ telles que $\int_0^1 fg = 0$.

a) Montrer que $\int_0^1 f^2 \left(\int_0^1 g \right)^2 + \int_0^1 g^2 \left(\int_0^1 f \right)^2 \geq 4 \left(\int_0^1 f \int_0^1 g \right)^2$.

b) Montrer que $\int_0^1 f^2 \int_0^1 g^2 \geq 4 \left(\int_0^1 f \int_0^1 g \right)^2$.

129. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que f^2 et $(f'')^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et $f(0)f'(0) = 0$.

Lorsque cela a un sens, on pose $\|g\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(t) dt}$. Montrer que $(f')^2$ est intégrable et $\|f'\|^2 \leq \|f\| \cdot \|f''\|$.

130. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ telle que $\int_0^{+\infty} f^2(t) dt$ converge. On pose $g : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$.

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{g^2(x)}{x^2} dx$ converge.

131. a) Pour $p \in \mathbb{R}$, calculer $\sup \left\{ xp - \frac{x^2}{2} ; x \in \mathbb{Q} \right\}$.

b) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ contenant les fonctions constantes et tel que :

- pour toutes $f, g \in F$, la fonction $x \mapsto \max(f(x), g(x))$ est dans F ;
- pour toute suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions de F qui tend simplement vers une fonction f , la fonction f appartient à F .

Montrer que, si $f, g \in F$, alors $fg \in F$.

132. Pour $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$. On

admet que, si f est continue, alors (P_n) tend uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ afin qu'il existe une suite de polynômes à coefficients entiers qui converge uniformément vers f .

133. Soit $f : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5 \left(1 + \frac{i}{n^3} - z\right)}$.

- a) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
 b) Montrer que la restriction de f à l'ensemble des nombres complexes de module 1 n'est pas continue.

134. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf'(x/2)$.

- a) Chercher les $f \in \mathcal{S}$ développables en série entière.
 b) L'espace $\mathcal{S}$ est-il de dimension finie ?

135. Soit $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers 0. Pour $t \in]-1, 1[$, on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n$.

- a) Vérifier que f est bien définie sur $] -1 ; 1 [$.
 b) Montrer que $\lim_{t \rightarrow 1^-} tf(t) = 0$.
 c) On suppose de plus qu'il existe des réels $a_1, \dots, a_r$ et $0 < \theta_1 < \dots < \theta_r < \pi$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^r a_k \cos(n\theta_k)$. Montrer que $a_k = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

136. La fonction $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{k!}$ admet-elle une limite lorsque x tend vers 1^- ?

137. Soit $(a_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de nombres complexes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série entière $f_n : z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n} z^k$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. On note

B l'ensemble des nombres complexes de module ≤ 1 . On suppose que la suite (f_n) converge simplement sur B et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $z \in B$, $|f_n(z)| \leq M$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$ pour tout $r < 1$.

138. Soient U un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ et f une fonction de U dans $\mathbb{C}$ développable en série entière au voisinage de 0 telle que $f(z) = O(z^k)$ lorsque $z \rightarrow 0$. Montrer que, pour $r > 0$ assez petit, il existe au moins $2k$ nombres complexes z de module r tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.

139. Pour $x \geq 0$, on pose $I(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) d\theta$.

- a) Écrire $I(x)$ sous la forme d'une série.
 b) Montrer que $I(x) = \mathcal{O}(x^{-1/4})$ quand x tend vers $+\infty$.

140. On admet le théorème d'approximation de Weierstrass. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $a, b > 0$. On suppose que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-a; a]$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt$.

- a) On suppose que $\hat{f}(x) = 0$ pour tout $x \in [-b; b]$. Montrer que $f = 0$.

b) On suppose que $\hat{f}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-b; b]$. Montrer que $f = 0$.

141. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' - 4xy = 0$.

Ind. Chercher les solutions développables en série entière.

142. Soient $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $(E) : y'' - py = 0$.

a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 0$.

b) On admet que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe y vérifiant (E) et $(y(0), y'(0)) = (a, b)$. Montrer que (E) admet une solution non bornée.

143. Soit $X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{2n}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $X'(t) = JSX(t)$, où $J = \begin{pmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix}$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que X est bornée sur $\mathbb{R}$.

144. Déterminer les extrema globaux et locaux de $f : M \in \text{SO}_4(\mathbb{R}) \mapsto \text{tr}(A)$.

145. Soient $d \in \mathbb{N}$ et $\Omega \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. On suppose que $\nabla(\Omega)(0) = 0$ et on note $D_a^2(\Omega)$ la hessienne en a de Ω . On suppose que $\text{Im}(D_a^2(\Omega)) = F$, où F est indépendant de a et de rang p .

Montrer qu'il existe un changement de coordonnées f (c'est-à-dire une application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$) tel que, pour tout $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $(\Omega \circ f)(x_1, \dots, x_d)$ ne dépende que de $(x_1, \dots, x_p)$.

146. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et une suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{R}^N$ qui tend vers 0 telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f - \varphi_n$ admette un minimum local en x_n .

Probabilités

147. On lance une pièce une infinité de fois. On note S_n le nombre de successions de deux pile consécutifs dans les n premiers lancers.

a) Trouver $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathbf{V}(S_n)$.

b) On pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}, S_n = 1\}$. Calculer $G_T(t)$ et en déduire sa loi.

148. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction $p_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ est croissante sur $[0, 1]$. Interpréter d'un point de vue probabiliste.

149. On étudie un groupe de cellules. À l'instant initial, $n = 0$, il y en a une. À chaque instant, chaque cellule peut de façon équiprobable : mourir, rester telle qu'elle est, se diviser en 2, se diviser en 3. Calculer la probabilité que le groupe disparaisse.

150. Soient $p \in]0, 1[$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie par $X_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n + 1$ avec une probabilité p et $X_{n+1} = 0$ avec probabilité $1 - p$. Déterminer la loi de X_n , son espérance et sa variance.

151. Soit Ω un ensemble. On dit que $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une classe monotone si elle vérifie :

- (i) $\Omega \in \mathcal{M}$, (ii) $\mathcal{M}$ est stable par union croissante,
- (iii) si $A, B \in \mathcal{M}$ et $B \subset A$, alors $A \setminus B \in \mathcal{M}$.

a) Montrer qu'une intersection de classes monotones est une classe monotone.

b) Montrer qu'une classe monotone stable par intersection finie est une tribu.

c) Soit $C \subset \mathcal{P}(\Omega)$ stable par intersection finie. Montrer que la classe monotone D engendrée par C (c'est-à-dire la plus petite classe monotone contenant C) est une tribu.

Mines - Ponts – PC

Algèbre

152. Soient A un ensemble de réels de cardinal $n \geq 2$ et $B = \{a + a', (a, a') \in A^2\}$.

a) Montrer que $2n - 1 \leq \text{Card } B \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

b) Donner des exemples de parties pour lesquelles les bornes sont atteintes.

c) Généraliser à $B_k = \{a_1 + a_2 + \dots + a_k ; a_1, \dots, a_k \in A\}$.

153. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $(X + 4)P(X) = XP(X + 1)$.

154. Déterminer les polynômes réels P vérifiant $P(X)P(X + 1) = P(X^2)$.

155. a) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire. Montrer que ses racines rationnelles sont dans $\mathbb{Z}$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un polynôme unitaire $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ de degré n tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on ait $P_n(2 \cos \theta) = 2 \cos(n\theta)$.

c) Montrer que $\cos(\pi\mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q} = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

156. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n . Calculer $\sum_{k=0}^n \frac{P(k)}{\prod_{i \neq k} (k - i)}$.

157. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note $(*)$ $(1 + iX)^{2n+1} - (1 - iX)^{2n+1} = 2iXQ_n(X)$.

a) Montrer qu'il existe un unique $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(*)$. Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n .

b) Déterminer les racines de Q_n .

c) Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} \left(4 + \tan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$.

158. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$. On pose $Q = P + P' + \dots + P^{(n)}$.

a) Montrer que Q est minoré sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que Q est positif sur $\mathbb{R}$.

159. L'union de deux sous-espaces vectoriels est-elle un sous-espace vectoriel ?

160. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

161. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E = \{S_1, \dots, S_k\}$ l'ensemble des parties non vides de $\{1, \dots, n\}$. Soit $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } S_i \cap S_j \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } S_i \cap S_j = \emptyset \end{cases}$. Déterminer le rang de A .

162. a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $|\text{rg} A - \text{rg} B| \leq \text{rg}(A + B) \leq \text{rg} A + \text{rg} B$.

b) Soit $(v_1, \dots, v_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$ tel que $\sum_{i=1}^k v_i(v_i)^T = I_n$. Montrer que $k \geq n$.

163. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que : $A^2 = A$, $B^2 = B$ et $AB = BA$. Montrer que $\det(A - B) \in \{-1, 0, 1\}$.

164. a) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $f_A : M \mapsto \text{tr}(AM)$. Montrer que l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$, $A \mapsto f_A$ est un isomorphisme.

b) Soit $g \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $g(AB) = g(BA)$. Montrer que g est proportionnelle à la trace.

c) Soit h un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $h(AB) = h(BA)$. Montrer que h préserve la trace.

165. Trouver $\dim(\text{Vect}(A))$ dans les deux cas suivants :

i) $A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), M^n = \text{Diag}(1, 2)\}$ avec $n \geq 2$,

ii) $A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), M^2 = I_2\}$.

166. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $S(A)$ l'ensemble des matrices semblables à A . Déterminer les matrices A telles que $S(A)$ est fini.

167. Soit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

a) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Montrer que $\varphi_\sigma : s \mapsto s \circ \sigma$ est une permutation de $\mathfrak{S}_n$.

b) Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note f_σ l'endomorphisme de E défini par $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. On pose

$p_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_\sigma$. Montrer que p_n est un projecteur et expliciter son image et son noyau.

168. Soient $n \geq 2$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\phi : P \in E \mapsto P - P'$.

a) Montrer que ϕ est bijectif de deux manières différentes.

b) Soit Q l'antécédent de P par ϕ . On suppose que $Q \geq 0$. Montrer que $P \geq 0$. Exprimer P en fonction de Q .

169. Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $(AB)^2 = AB$. Déterminer $\text{rg}(A)$, $\text{rg}(B)$. Montrer que $BA = I_2$.

170. Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, φ une forme linéaire sur E et $f \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer que $\text{Ker}(\varphi)$ est stable par f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi \circ f = \lambda\varphi$.

b) Soit $\mathcal{B}$ une base de E . On pose $L = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Montrer que $\text{Ker}(\varphi)$ est stable par f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A^T L^T = \lambda L^T$.

c) Trouver toutes les droites stables par l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

171. Soient $n \geq 2$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose $ABAB = 0$. A-t-on $BABA = 0$?

172. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = -4 \text{id}$ où E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n .

a) Déterminer le noyau et l'image de f . L'endomorphisme f est-il inversible? Si c'est le cas, déterminer f^{-1} .

b) Montrer que n est nécessairement pair.

c) Pour $x \neq 0$, montrer que $(x, f(x))$ est une famille libre.

d) On suppose maintenant que $n = 4$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la

matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

173. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre $X + X^T = \text{tr}(X)A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

174. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, (X, AX) est liée. Que dire de A ?

b) Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

175. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme nilpotent tel que tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire stable par u . Montrer que u est l'endomorphisme nul.

176. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v = \mathcal{L}(F, G)$ et $w = v \circ u$. Montrer que w est un isomorphisme si et seulement si les trois conditions suivantes sont réalisées : **i)** u est injective, **ii)** v est surjective, **iii)** $F = \text{Im } u \oplus \text{Ker } v$.

177. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\text{rg}(u) = \text{rg}(v)$ et $u^2 \circ v = u$.

a) Montrer que $v \circ u \circ v = v$.

b) Montrer que $u \circ v$ est un projecteur

c) Montrer que $u \circ v \circ u = u$ puis que $v^2 \circ u = v$.

178. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

a) Que dire de la trace d'un projecteur de E ? Montrer que, pour p projecteur de E , $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont supplémentaires dans E .

b) Soient p, q deux projecteurs de E . Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

179. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \geq \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim(F)$.

180. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Soit $w = v \circ u$. Montrer que w est un isomorphisme si et seulement si u est injectif, v est surjectif et $\text{Im } u \oplus \text{Ker } v = F$.

181. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer que $\text{rg}(v) \leq \text{rg}(u \circ v) + \dim(\text{Ker } u)$.

b) On suppose que u est nilpotent d'indice p . Montrer que $(\dim(\text{Ker } u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante puis stationnaire.

182. a) Existe-t-il deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$?

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle de trace nulle. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^n$ telle que la famille (u, Au) soit libre.

c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

183. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\text{rg}(AB - BA) = 1$.

Montrer que $A(\text{Ker}(B)) \subset \text{Ker}(B)$ ou $A(\text{Im}(B)) \subset \text{Im}(B)$

184. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension p et $f_1, \dots, f_p$ des formes linéaires sur E . Prouver l'équivalence des trois assertions suivantes :

i) $(f_1, \dots, f_p)$ est libre,

ii) $u : x \in E \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x)) \in \mathbb{K}^p$ est surjective,

iii) il existe $x_1, \dots, x_p \in E$ tels que $\det(f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq p} \neq 0$.

185. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ pour que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \text{ soit diagonalisable.}$$

186. Soient $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \\ a_1 & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix}$. Donner une

condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

187. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

188. Redémontrer qu'une matrice diagonalisable a un polynôme annulateur scindé à racines simples.

189. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et qu'elle admet une unique valeur propre réelle strictement positive a .

b) Montrer que $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda^n$ est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Déterminer la nature de la série $\sum \sin(\pi a^n)$.

190. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie.

a) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.

b) Soient v et w dans $\mathcal{L}(E)$ tels que v est diagonalisable, w est nilpotent et $v \circ w = w \circ v$. Montrer que $v + w$ et v ont le même polynôme caractéristique.

191. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de spectre vide.

a) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 tel que $\text{Ker } P(u) \neq \{0\}$.

b) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 et stable par u .

c) En déduire que tout endomorphisme de E admet un sous-espace vectoriel stable de dimension 1 ou 2.

192. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f^2 est diagonalisable et $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.

193. Soient f, g deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension finie tels que $f \circ g = f + g$.

a) Montrer que $\text{Im } f = \text{Im } g$ et que $\text{Ker } f = \text{Ker } g$.

b) On suppose de plus que f est diagonalisable. Montrer que $f \circ g$ est diagonalisable.

c) Montrer qu'aucune valeur propre de $f \circ g$ n'appartient à $]0, 4[$.

194. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable à $-A$ si et seulement si $\text{tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 0$.

195. Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = \text{diag}(1, 2, -1, -1)$.

196. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a) Exprimer le rang de B en fonction du rang de A .

b) Étudier la diagonalisabilité de B en fonction de celle de A .

197. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Trouver une relation entre les valeurs propres de A et celles de B ainsi qu'entre les sous-espaces propres de A et ceux de B .
- b) Déterminer les dimensions des sous-espaces propres de B en fonction des dimensions des sous-espaces propres de A .
- c) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

198. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. Peut-on trigonaliser A et B dans une même base ?

199. Soient $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ et $(\beta_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$. On pose $A = (\alpha_i \beta_j)_{1 \leq i, j \leq n}$.

- a) Quel est le rang de A ?
- b) Montrer que $A^2 = \text{tr}(A) A$.
- c) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{rg}(M) = 1$. Montrer qu'il existe $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ telles que $M = X^T Y$.
- d) Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = 0_3$.
- e) À quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable ?

200. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = I_3$ et $M \neq I_3$.

- a) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Donner ses valeurs propres.
- b) La matrice M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? Montrer que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{1, j, j^2\}$ et que les multiplicités de j et j^2 sont les mêmes. Donner le spectre de M .
- c) Montrer que A et M sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, puis dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

201. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{C}^*)^2$ tels que $\lambda \neq \mu$. On suppose : $I_n = A + B$, $M = \lambda A + \mu B$, $M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$.

- a) Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1} .
- b) Montrer que A et B sont des projecteurs.
- c) La matrice M est-elle diagonalisable ? Si oui, trouver $\text{Sp}(M)$.

202. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$.

On note $\Psi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto MB - BM$.

- a) Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Psi(A^k) = kA^k$. Calculer $\text{tr}(A)$.
- b) Montrer que si A n'est pas nilpotente alors Ψ a une infinité de valeurs propres. Conclure

203. Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr}(A) \neq 0$.

- a) On considère $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\Phi : M \mapsto \text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A$.
 - i) Trouver $\text{Ker}\Phi$ et $\text{Im}\Phi$.
 - ii) Déterminer les éléments propres de Φ .
 - iii) Déterminer la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique de Φ .
- b) On considère $\Psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\Psi : M \mapsto \text{Tr}(A)M + \text{Tr}(M)A$.
 - i) Trouver les éléments propres de Ψ .

ii) Montrer que Ψ est bijective et déterminer sa réciproque.

204. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ défini par $f_A(M) = AM$. Montrer que A et f_A ont les mêmes valeurs propres.

205. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On cherche le nombre de solutions de l'équation $B^3 = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer que, si B est solution, alors $AB = BA$.

b) Montrer que si A est diagonalisable et a un sous-espace propre de dimension ≥ 2 alors il y a une infinité de solutions.

c) Traiter le cas où A admet trois valeurs propres réelles distinctes.

d) Traiter le cas où $A = \begin{pmatrix} r \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ r \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $r > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

e) Cas général ?

206. On note $D : P \mapsto P'$ l'endomorphisme dérivation de $\mathbb{R}[X]$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par D et déterminer la matrice de l'endomorphisme induit par D dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ de dimension finie non nulle stable par D .

i) Montrer qu'il existe un entier n et un polynôme R de degré n tel que $R \in F$ et $F \subset \mathbb{R}_n[X]$.

ii) Montrer que la famille $(D^j(R))_{0 \leq j \leq n}$ est libre.

iii) En déduire que $F = \mathbb{R}_n[X]$.

iv) Expliciter tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ stables par D .

207. On note $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Soit Φ l'application qui à $f \in E$ associe la fonction $\Phi(f)$ définie par : $\Phi(f)(0) = f(0)$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Phi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E .

b) Déterminer les valeurs propres de Φ et les espaces propres associés.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que Φ stabilise $\mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme induit par Φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ est-il diagonalisable ?

208. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{2^n} = I_2$. Montrer que $A^2 = I_2$ ou qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{2^k} = -I_2$.

209. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices diagonalisables.

a) Montrer que $\dim(E) \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

b) Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, quelle est la dimension maximale de E ?

210. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 soit triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux égaux à 1, 2, ..., n . Montrer que A est triangulaire supérieure.

211. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ admet une limite $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a) Montrer que $B^2 = B$, $BA = AB$. Déterminer $\text{Ker}(B)$ et $\text{Im}(B)$.
 b) Montrer que $\text{Sp}(A) \subset \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\} \cup \{1\}$. Montrer que si 1 n'est pas valeur propre de A alors $B = 0$.
 c) Montrer que la multiplicité de 1 dans le polynôme caractéristique de A est égale à la dimension de $\text{Ker}(A - I_n)$.

212. Soient a, b deux réels et n un entier.

Montrer que $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X-a)(X-b)P' - nP$ est un endomorphisme et déterminer ses éléments propres. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

213. a) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $B = I_n + A + A^3$. Montrer que A est un polynôme en B .

b) Le résultat de **a)** subsiste-t-il lorsque A est complexe ?

214. a) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non trigonalisable. Montrer que A est $\mathbb{C}$ -diagonalisable.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Montrer que l'une des conditions suivantes est réalisée :

i) A est $\mathbb{R}$ -trigonalisable ; **ii)** A est $\mathbb{C}$ -diagonalisable ;

iii) A est $\mathbb{R}$ -semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

215. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$. Soit L l'ensemble $L = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$.

a) Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que la famille $(x_0, Ax_0, A^2x_0, \dots, A^{n-1}x_0)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

b) En déduire que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est une base de L .

216. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit u un automorphisme de E tel que, pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{u^k(x) ; k \in \mathbb{N}\}$ est fini.

a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^N = \text{id}$.

b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

217. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que $\forall i \neq j, \langle u_i, u_j \rangle < 0$.

Montrer que toute sous-famille de $(u_1, \dots, u_p)$ de cardinal $(p-1)$ est libre.

218. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente non nulle.

a) Montrer qu'il existe $V \in \mathbb{R}^n$ tel que $AV \neq 0$ et $A^2V = 0$.

b) On note $\langle , \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

Déterminer l'ensemble $\{\langle AX, X \rangle ; X \in \mathbb{R}^n\}$.

c) Trouver les matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\{\langle BX, X \rangle ; X \in \mathbb{R}^n\} = \{0\}$.

219. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soient $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ des réels. Pour $P, Q \in E$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k).$$

a) Montrer que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur E .

b) Trouver une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

c) Soit H l'ensemble des $Q \in E$ tels que $\sum_{k=0}^n Q(a_k) = 0$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E et préciser sa dimension.

d) Pour $P \in E$, déterminer $d(P, H)$.

220. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$. Préciser le spectre et les sous-espaces propres.

221. a) Montrer que $\phi : P \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2XP'$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est symétrique pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^+ P(t)Q(t) dt$.

b) Déterminer les valeurs propres de ϕ .

c) Montrer qu'il existe une unique base orthonormée de vecteurs propres $(P_0, \dots, P_n)$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg P_k = k$ et $\langle P_k, X^k \rangle > 0$.

d) On pose $Q_k(X) = (-1)^k P_k(-X)$. Montrer que $(Q_0, \dots, Q_n)$ vérifie les propriétés de c).

Que peut-on en déduire ?

e) Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $] -1, 1[$.

222. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\Phi_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\Phi_{a,b} : M \mapsto aM + bM^T$.

a) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\Phi_{a,b}$.

b) Déterminer $\text{Tr}(\Phi_{a,b})$ puis son polynôme caractéristique.

c) À quelle condition $\Phi_{a,b}$ est-il un automorphisme ? Déterminer alors $\Phi_{a,b}^{-1}$.

d) L'endomorphisme $\Phi_{a,b}$ est-il autoadjoint ?

223. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 + A^T = I_n$ et $\text{tr}(A) = 0$.

a) Montrer que toute valeur propre de A vérifie $\lambda^4 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$ et que A est diagonalisable.

b) Montrer que n est multiple de 4.

224. Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, a et b deux vecteurs libres de E et $f : x \in E \mapsto \langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b$.

a) Déterminer le noyau et l'image de f .

b) Déterminer les éléments propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Aurait-on pu le prévoir sans étudier les éléments propres ?

225. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T A X = 0$. Montrer que $\det(A) \geq 0$.

226. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de spectre $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\|X\|^4 \leq \langle AX, X \rangle \langle A^{-1}X, X \rangle$.

b) Montrer que $\langle AX, X \rangle \langle A^{-1}X, X \rangle \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n} \|X\|^4$.

d) Montrer qu'il existe une base orthonormale $(P_0, \dots, P_n)$ de E telle que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(P_k) = k$ et $\langle P_k, X^k \rangle > 0$.

227. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$. On note $\alpha(t) \leq \beta(t) \leq \gamma(t)$ les valeurs propres de $M(t)$.

a) Montrer que $\alpha(t) < 0 < \beta(t) < 2 < \gamma(t)$.

b) Montrer que, lorsque $t \rightarrow +\infty$, $\alpha(t) \rightarrow 0$, $\beta(t) \rightarrow 2$ et que $\gamma(t) = t + O\left(\frac{1}{t}\right)$.

228. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est antisymétrique si et seulement si pour toute $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, la matrice $P^{-1}MP$ est à diagonale nulle.

229. Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer :

$$\sum_{i,j} m_{i,j}^2 = n, \quad \left| \sum_{i,j} m_{i,j} \right| \leq n, \quad n \leq \sum_{i,j} |m_{i,j}| \leq n \ln(n).$$

230. Soient E un espace euclidien et p, q deux projecteurs orthogonaux. On considère $h = p \circ q$.

a) Montrer que $\text{Im}(q)$ et $\text{Ker}(p)$ sont stables par h .

b) Montrer que p et q sont autoadjoints.

c) On pose $F = \text{Im}(q) + \text{Ker}(p)$. Montrer que $E = F \oplus F^\perp$. En déduire que h est diagonalisable.

d) Montrer que le spectre de h est contenu dans le segment $[0, 1]$.

231. Soient $n \geq 2$, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il existe une matrice C telle que $C^2 = A^{-1}$.

b) Montrer, en posant $D = CBC$, que $(\det(I_n + D))^{\frac{1}{n}} \geq 1 + (\det D)^{\frac{1}{n}}$.

c) En déduire que $(\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}}$.

232. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$. Étudier l'unicité d'une telle décomposition.

233. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $ABA = B$ et $BAB = A$.

a) Montrer que $A^2 = B^2$.

b) On suppose que A est inversible. Montrer que A et B sont des symétries orthogonales qui commutent.

c) On ne suppose plus que A est inversible. Montrer que $\text{Im } A = \text{Im } B$ et $\text{Ker } A = \text{Ker } B$.

Analyse

234. Les parties $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2(x-1)(x-3) + y^2(y^2-4) = 0\}$ et

$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 - y(y-1) = 0\}$ sont-elles fermées ? bornées ?

235. Soit E un espace euclidien. Soit $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ et un ouvert Ω dense dans E tels que $\forall x \in \Omega, \frac{\|u^{k+1}(x)\|}{\|u^k(x)\|} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} m$.

236. a) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que $\{Q(A); Q \in \mathbb{C}[X]\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b) Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On suppose que B a n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = Q(A)$.

c) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que $\{Q(A); A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\}$ est une partie dense de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Cet ensemble est-il fermé ? borné ?

237. Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles convergeant vers a et b respectivement.

Montrer que $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} ab$.

238. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle définie par $u_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = nu_n - 1$. Montrer que $u_1 = e - 1$ si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant $u_n = O(n^a)$.

239. Pour n et p dans $\mathbb{N}^*$, on pose $u_{n,p} = \frac{1}{p^n} \left(\sqrt[n]{1 + \frac{1}{p}} + \sqrt[n]{1 + \frac{2}{p}} + \dots + \sqrt[n]{1 + \frac{p}{p}} \right)^n$.

a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} u_{n,p}$.

b) Calculer $\lim_{p \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n,p}$.

240. On pose $S_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}$ et $x_n = \min\{t > 0, S_n(t) = 0\}$.

a) Montrer que x_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Étudier les variations et la convergence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

241. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que $x_0 > 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + x_n^{-1}$. Montrer que $x_n \sim \sqrt{2n}$.

242. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note x_n la solution de $e^x = n - x$. Limite, équivalent et développement asymptotique à deux termes de x_n .

243. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature de la série de terme général $u_n = n^\alpha \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$?

244. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + (-1)^n}$.

245. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \ln k}{k}$, $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$ et $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{k}$.

- a) Montrer que (x_n) converge vers un réel ℓ à déterminer. Montrer que $x_n = \ell + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.
- b) Exprimer u_{2n} en fonction de v_{2n} et w_n .
- c) Montrer que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
- d) Établir la convergence de (u_n) et préciser sa limite.

246. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $a_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 2$, $a_n = 2a_{\lfloor n/2 \rfloor}$. Montrer que $\sum \frac{1}{a_n^2}$ converge.

247. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*})$ telle que $f' \leq 0$ et $f(0) = 1$. On pose $a_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n f(a_n)$. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît et tend vers 0. Étudier la nature de la série $\sum a_n$.

248. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ et $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$. Déterminer la nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

249. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n^{(0)} = \frac{(-1)^n}{n}$, $R_n^{(1)} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ et pour $\ell \in \mathbb{N}^*$,

$R_n^{(\ell)} = \sum_{k=n}^{+\infty} R_k^{(\ell-1)}$. Justifier l'existence et étudier le signe de $R_n^{(\ell)}$. Ind. Calculer $\int_0^1 t^k dt$.

250. Soit f une fonction continue et injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

En considérant $g_x : t \mapsto f(x+t) - f(x)$ montrer que f est strictement monotone.

251. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que l'image de tout segment est un segment de même longueur.

252. Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^p)^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer que f est continue si et seulement si f est linéaire.

253. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x).$$

254. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $(*) : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2$.

- a) Donner toutes les valeurs que peut prendre $f(0)$.

b) Montrer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$, on a $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 0$. En déduire que si f s'annule en un point, f est identiquement nulle.

c) Trouver toutes les fonctions continues vérifiant (*).

255. Soient f, g deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

256. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et non nulle pour laquelle il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1], f'(x) \leq Mf(x)$. Montrer que f ne s'annule pas.

257. Montrer que $x \mapsto \cos(x)$ admet un unique point fixe. Montrer qu'il n'existe pas de fonction f dérivable telle que $\cos = f \circ f$.

258. Soit f une fonction telle que, pour $0 < x < 1$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$. Trouver $g \in C^\infty(]-\infty, 1])$ telle que $g|_{]0,1[} = f$.

259. Soit $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer qu'il existe $x \in]a, b[$ tel que $f'(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

260. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f^2 + (1 + f')^2 \leq 1$. Montrer que $f = 0$.

261. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} telle que $f(0) = 0$. Pour $x > 0$, on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Déterminer, pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\lim_{x \rightarrow 0} g^{(k)}(x)$.

262. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}$ tel que $\int_x^a \exp(t^2) dt = 1$. On définit alors $x \mapsto a(x)$. Montrer que a est C^∞ . Montrer que le graphe de a est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = -x$.

263. Trouver un équivalent simple en 0 de $f : x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} \frac{e^t}{\arcsin t} dt$.

264. Calculer $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(x)) dx$.

265. Soit $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Déterminer la limite de (nU_n) .

266. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\int_0^1 f(x)x^n dx = 0$ pour $0 \leq k \leq n$. Montrer que f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $]0, 1[$.

267. Soit x un nombre complexe de module différent de 1. Calculer $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{x - e^{it}}$:

- en utilisant la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{nX^{n-1}}{X^n - 1}$,
- par une autre méthode.

268. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, et $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^{+*})$. On pose $m = \inf_{[a, b]} \frac{f}{g}$ et

$$M = \sup_{[a, b]} \frac{f}{g}. \text{ Montrer que } \int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \leq \frac{(M + m)^2}{4Mm} \left(\int_a^b fg \right)^2.$$

269. Soient $c \in \mathbb{R}$, u et v deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^+$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^+, u(x) \leq c + \int_0^x v(t) u(t) dt$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, u(x) \leq c \exp \left(\int_0^x v(t) dt \right)$.

270. Montrer qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π -périodique, on ait $\sup_{\mathbb{R}} |f| \leq A \int_0^{2\pi} |f| + B \int_0^{2\pi} |f'|$. L'inégalité subsiste-elle si on enlève une hypothèse.

271. On considère une fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'on dispose de $x_0 \in]a, b[, y_0 > f(x_0)$ et qu'un cercle C de centre (x_0, y_0) passant par $(x_0, f(x_0))$ est au-dessus du graphe de f . Montrer que $f'(x_0) = 0$.

272. Soit $M : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} 2e^{-t} & (t-1)^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que l'application $N : A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \sup_{1 \leq i, j \leq 2} |a_{i,j}|$ est une norme.

Déterminer $\varphi(t) = N(M(t))$ et tracer le graphe de φ . La fonction φ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

b) Déterminer la primitive Φ de φ telle que $\Phi(0) = 0$. Φ est-elle $\mathcal{C}^1$?

c) Soit F la primitive de M telle que $F(0) = 0$. Prouver $\forall t \geq 0, N(F(t)) \leq \Phi(t)$.

273. Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x} + \sin(x)} dx$?

274. Pour $\alpha > 0$ déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \left(1 + \ln(\operatorname{sh} x^\alpha) - 2 \operatorname{sh}(\ln(x^\alpha + 1)) \right) dx$.

275. Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln|1-x| \cos(\ln(x))}{x^\alpha(1+x)} dx$ et $\int_0^1 \frac{\ln|1-x| \cos(\ln(x))}{x^\alpha(1+x)} dx$?

276. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} |\sin x|^x dx$.

277. Existence et calcul des intégrales $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x} dx$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{ch} x} dx$.

278. On considère $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = f(1) = 0\}$. Soit $f \in E$.

a) Montrer que $I(f) = \int_0^1 \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f'(t) f(t) dt$ est bien définie, et que

$$I(f) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{f(t)^2}{\sin(\pi t)^2} dt$$

b) En considérant $\int_0^1 \left(\pi \frac{\cos(\pi t)}{\sin(\pi t)} f(t) - f'(t) \right)^2 dt$, montrer que

$$\int_0^1 f'(t)^2 dt \geq \pi^2 \int_0^1 f(t)^2 dt.$$

c) Déterminer les fonctions f pour lesquelles il y a égalité dans **b**).

279. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-(t-p\pi)^2} \sin(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que son intégrale est nulle.

280. Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\ln(t) - \frac{1}{t} + \frac{1}{1-e^{-t}} \right) dt$.

281. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, positive, décroissante et telle que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Montrer que $tf(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Ind. Considérer $\int_t^{2t} f(x) dx$.

282. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\int_0^{+\infty} f'(t)^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt$

convergent. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt \leq \left(\int_0^{+\infty} f'(t)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 dt \right)^{1/2}.$$

283. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$.

a) Montrer que, pour tout $y \geq 0$, il existe un unique $x \geq 0$ tel que $A_n(x) = y$. On pose $f_n(y) = x$.

b) Étudier la monotonie de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et montrer que la suite converge simplement vers une fonction f .

c) Montrer que $\forall x \geq 0, 0 \leq f(x) < 1$.

d) Montrer que $\forall x \geq 0, f(x) = 1 - e^{-x}$.

284. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right)$.

- a) Montrer que f est bien définie sur $[0; 1]$.
 b) Montrer que f est continue et intégrable sur $[0; 1]$.
 c) Calculer $\int_0^1 f(x) dx$.
 d) Montrer que f est dérivable. Est-elle de classe $\mathcal{C}^k$?

285. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x^2}$.

- a) Déterminer le domaine de définition et de continuité de f .
 b) Déterminer la limite de f et un équivalent en $+\infty$.
 c) Déterminer la limite de f et un équivalent en 0.

286. Soit $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 x^2}$. Déterminer les limites et équivalents de F en 0 et en $+\infty$.

287. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.

On note (*) la propriété : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4g(x)$.

- a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et 1-périodique.
 b) Montrer que f vérifie (*).
 c) Montrer que, si g est continue sur $\mathbb{R}$, 1-périodique et vérifie (*) alors g est nulle.
 e) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, f(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$.

288. Préciser le domaine de définition de $f : x \mapsto \sum_{n \geq 0} e^{-n} e^{in^2 x}$. Montrer que l'application f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Est-elle développable en série entière ?

289. Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum e^{-x} \frac{x^k}{k!}$.

290. Soit $\alpha > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose $u_n(x) = x^\alpha e^{-n^2 x}$ puis $f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

- a) Montrer que f_α est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
 b) Trouver les α pour lesquels la série $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^{+*}$.
 c) Trouver la limite puis un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.
 d) Trouver la limite puis un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.

291. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\forall n \geq 2, a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$. Trouver f de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = a_n$.

292. Soit $f : x \in]-1, 1[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

- a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
 b) Montrer que f est développable en série entière.

293. On s'intéresse à la série entière suivante : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$ avec $u_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt$.

- a) Déterminer la limite de la suite (u_n) .
 b) Déterminer le domaine de convergence de la série entière.
 c) Déterminer la limite de f à la borne de droite du domaine de convergence.

294. Soit N un entier qui n'est pas un carré parfait. On pose $a = \sqrt{N}$.

- a) Montrer qu'il existe une suite d'entiers $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $na - p_n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
 b) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin(na\pi) > cn^{-1}$.
 c) En déduire le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\sin(n\pi\sqrt{2})}$.

295. On pose $b_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = -\frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k} b_k$.

- a) Montrer que, pour tout n , $|b_n| \leq n!$.
 b) Pour $|z| < 1$, montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k!} z^k = \frac{z}{e^z - 1}$.
 c) Montrer que $x \mapsto \cotan(x) - \frac{1}{x}$ est développable en série entière.
 d) Quel est le lien entre les deux dernières questions ? On pourra poser $z = 2i\pi x$.

296. Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

- a) Déterminer le rayon de convergence R de S . Montrer que S est solution de l'équation différentielle $x(x-4)y' + (x+2)y = 2$.
 b) En déduire $S(x)$ pour tout $x \in]0, R[$.
 c) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$

297. Montrer qu'il existe une fonction φ développable en série entière en 0 vérifiant au voisinage de 0 : $\varphi'(x) = x + \varphi^2(x)$.

298. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$.

- a) Que dire de I_n ?
 b) Montrer que (I_n) et (J_n) convergent vers la même limite. Trouver cette limite.

299. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2) \sqrt[n]{1+t^n}}$. Montrer que chaque intégrale I_n est convergente puis déterminer la limite de la suite (I_n) .

300. Pour $n \geq 2$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+\dots+t^n}$. Justifier que I_n existe puis déterminer un équivalent de I_n quand $n \rightarrow +\infty$.

301. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, on pose $f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$.

a) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$. Calculer I_n et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

c) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$.

d) Donner un développement asymptotique à deux termes de I_n .

302. Soient $a > -1$ et $b > 0$. On définit les suites (I_n) et (J_n) par $J_n = \int_0^{+\infty} x^a e^{-nx} dx$

et $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^a e^{-nx}}{\sqrt{1+x^b}} dx$.

a) Étudier l'existence de J_n et en déduire celle de I_n .

b) Déterminer la limite de (J_n) .

c) Exprimer J_n à l'aide de la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ et retrouver ainsi la limite de la suite.

d) Déterminer un équivalent de I_n à l'aide de J_n .

303. Montrer : $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^p} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+kp}$. Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+2k}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+3k}$.

304. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$.

a) Déterminer la limite de (I_n) .

b) Justifier l'existence de $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$.

c) Montrer que $I_n \sim \frac{J}{n}$.

d) Montrer que $J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

305. a) Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx$ est convergente.

b) On pose $J = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx$. Montrer que $I = 2J$.

c) Exprimer J à l'aide de la somme d'une série.

d) On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer J .

306. On considère $J = \int_0^1 \ln(t) \ln(1-t) dt$.

Montrer que J est bien définie et que $J = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$. En déduire la valeur de J .

307. Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} t}{t} e^{-xt} dt$.

a) Déterminer le domaine de définition et la limite en $+\infty$ de F .

b) Donner une expression simple de $F(x)$.

308. Étudier $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} dt$.

309. Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$.

a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

b) Montrer que F est dérivable et calculer F' .

c) En déduire la valeur de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t^2)}{t^2} dt$.

310. Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt$, où $0 < a < b$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Montrer qu'il existe une constante C telle que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + b^2}{x^2 + a^2} \right) + C$.

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et conclure quant à la constante C .

311. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée. Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-|x-t|} dt$.

a) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et bornée.

b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie l'équation différentielle $(*) : y'' - y = f(x)$.

c) Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et bornée sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation $(*)$. A-t-on $g = h$?

312. Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$. Trouver le domaine de définition de F et exprimer F sans le signe intégral.

313. Soit $F : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^{x+1}} dt$.

- a) Déterminer le domaine de définition de F .
- b) Montrer la continuité de F .
- c) Pour $x \geq 1$, donner l'expression de $F(x)$.

314. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \int_0^1 \ln(t) \ln(1 - t^x) dt$.

- a) La fonction f est-elle bien définie ?
- b) Écrire f comme la somme d'une série.
- c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

315. Pour $x > 0$, on pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+t^2}} dt$.

- a) Calculer $F'(x)$.
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, puis déterminer un équivalent de F en $+\infty$.
- c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = +\infty$, puis déterminer un équivalent de F en 0.

316. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^{+*})$. Pour $x > 0$, on pose $N_f(x) = \left(\int_0^1 f(t)^x dt \right)^{1/x}$.

- a) Montrer que N_f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- b) Déterminer la limite de $N_f(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.
- c) Déterminer la limite $\frac{1}{x} \left(\int_0^1 f(t)^x dt - 1 \right)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.
- d) Déterminer la limite de $N_f(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.

317. Soit f une fonction continue de $[a, b] \times [c, d]$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$.

Ind. Considérer $g : t \mapsto \int_a^b \left(\int_c^t f(x, y) dy \right) dx$.

318. Soit $(E) : x^2 y'' + 4xy' + 2y = \ln(1 + x)$.

- a) Trouver les solutions de (E) développables en série entière et déterminer leur rayon de convergence.
- b) Écrire ces fonctions à l'aide des fonctions usuelles.

319. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr}(A) > 0$. Soit $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que : (i) pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $x'(t) = Ax(t)$, (ii) pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = 0$.

Montrer qu'il existe une forme linéaire $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ non nulle telle que $\forall t \in \mathbb{R}, \ell(x(t)) = 0$.

320. On définit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $u \in E$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on considère le système d'équations différentielles $(L) : \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall t \in [0, 1], x_i'(t) = \lambda_i x_i(t) + u(t)$.

- a) Résoudre le système (L) .

b) Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\varphi_i(u)$ la valeur en $t = 1$ de la solution de la i -ème équation de (L) qui s'annule en $t = 0$. On note $\Phi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u))$. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi_i \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et que $\Phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n)$.

c) Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit un élément de F en posant $f_i : s \mapsto e^{\lambda_i(1-s)}$. Montrer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre si et seulement si la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

321. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$. Déterminer f .

322. Déterminer les extrema de $f(x, y) = x \ln y - y \ln x$ pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$.

323. Trouver les extrema de $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

Probabilités

324. Une boîte contient n boules numérotées de 1 à n . On tire des boules, une à une, avec remise, tant que le numéro de la boule tirée est supérieur au précédent. On note Z le nombre de boules tirées. Déterminer la loi de Z .

325. Une urne contient deux boules. L'une est blanche et l'autre est soit blanche soit noire avec probabilité $1/2$. On tire successivement deux boules de l'urne sans remise. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au second tirage sachant qu'on a tiré une boule blanche au premier tirage ?

326. Soient $a \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $N = an$. On dispose de N boules indiscernables et n urnes numérotées de 1 à n . On dépose les N boules dans les urnes. On note T_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'urne i est vide, et 0 sinon. On note Y_n le nombre d'urnes vides et $S_n = \frac{1}{n} Y_n$.

a) Donner la loi de T_i . Calculer l'espérance et la variance de T_i .

b) Calculer l'espérance et la variance de S_n . Étudier les limites de $(\mathbf{E}(S_n))$ et $(\mathbf{V}(S_n))$.

327. Une panier contient r pommes rouges et v pommes vertes. On mange les pommes une à une, on s'arrête lorsqu'on a mangé toutes les pommes vertes. Déterminer la probabilité d'avoir mangé toutes les pommes.

328. On répartit N objets dans $N - 1$ boîtes. Probabilité pour qu'aucune boîte ne soit vide ?

329. La durée de vie (en jours) d'une ampoule suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

a) Quelle est la durée de vie moyenne de cette ampoule ?

b) L'ampoule a déjà vécu n jours. Quelle est la durée de vie moyenne de cette ampoule à partir du n -ème jour ?

330. On considère deux dés et, pour $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, on note p_i (respectivement q_i) la probabilité que le premier dé (respectivement le second dé) donne le résultat i . On note P et Q les fonctions génératrices des deux dés. On note R la fonction génératrice de la somme des deux dés.

- a) Donner R .
- b) On suppose dorénavant que R est égale à la fonction génératrice de la somme de deux dés non pipés.
- c) Quelles sont les racines de R ?
- d) Montrer que les deux dés ne sont pas pipés.

331. Dans un magasin, on a n caisses et np clients. Chaque client choisit une caisse de façon indépendante et avec la même probabilité pour chacune des caisses. On note X_i le nombre de clients à la caisse numéro i .

- a) En écrivant X_i comme une somme de variables aléatoires indépendantes, déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_i .
- b) Pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, calculer $\text{Cov}(X_i, X_j)$.

332. Soient A et B deux événements. Montrer que $|\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)| \leq \frac{1}{4}$.

333. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X sachant $(Y = n)$ est la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

- a) Montrer que $Y + 1 - X$ et X ont même loi.
- b) On suppose X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Montrer que X et $Y + 1 - X$ sont indépendantes.

334. a) On munit l'ensemble des fonctions $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ de la loi uniforme. Déterminer la probabilité pour que f soit surjective.

b) Même question avec $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n - 2 \rrbracket$.

335. Soient U une variable aléatoire discrète, n et ℓ deux entiers naturels tels que $n \geq \ell + 3$ et $\mathbf{P}(U > n) \mathbf{P}(U > \ell) > 0$. On pose $Y = \left\lfloor \frac{U}{2} \right\rfloor$ et $Z = \left\lfloor \frac{U+1}{2} \right\rfloor$.

- a) Montrer que Y et Z ne sont pas indépendantes.
- b) On suppose que $U \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n \geq 4$ pair. Montrer que Y ne suit pas une loi binomiale.

336. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que $|Z| + 1 \sim \mathcal{G}(p)$ et telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \mathbf{P}(Z = n) = \mathbf{P}(Z = -n). \text{ Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & Z & Z \\ Z & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Déterminer la loi du rang de A .
- b) Déterminer la probabilité pour que A soit diagonalisable.

337. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p et q respectivement. En notant $M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$, donner la probabilité pour M soit diagonalisable.

338. Soit $M = (X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice aléatoire réelle où les $(1 + X_{i,j})$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$.

- a) Déterminer la probabilité que M soit symétrique.
 b) Déterminer la probabilité que M soit orthogonale.

339. Soit a un réel. On pose $g : t \mapsto \frac{a e^t}{2 - t}$.

a) Montrer qu'il existe une unique valeur de a pour laquelle il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont g soit la fonction génératrice.

On suppose maintenant que a est égal à cette valeur et que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont g est la fonction génératrice.

b) Trouver la probabilité que X soit pair.

c) Quelle est la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} X & X & 0 \\ -X & -X & 0 \\ X & X & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

340. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$. On suppose que $X \leq Y$, que $\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(Y = i) > 0, \forall 1 \leq k \leq i, \mathbf{P}(X = k | Y = i) = \frac{1}{i}$. Montrer que X et $Y - X + 1$ ont la même loi.

341. Soient $n \in \mathbb{N}^*, X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $M = (X_i X_j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

a) Déterminer la loi du rang de M , de la trace de M .

b) Quelle est la probabilité que M soit un projecteur ?

342. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n, \mathbf{P}(T > n) > 0$. Pour tout entier naturel n , on pose $\theta_n = \mathbf{P}(T = n | T \geq n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n \in [0, 1[$.

b) Exprimer θ_n en fonction de $\mathbf{P}(T \geq n)$. En déduire que $\sum \theta_n$ diverge.

343. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

a) Soit U une variable aléatoire telle que $U \sim \mathcal{B}(n, p)$. Déterminer la fonction génératrice de U .

b) Soient Y et Z deux variables aléatoires discrètes indépendantes telles que $U = Y + Z$ et $U \sim \mathcal{B}(n, p)$. Montrer que Y et Z suivent des lois binomiales (pas nécessairement de mêmes paramètres).

344. a) Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1, 1[$. Montrer que $\sum_{n=r-1}^{+\infty} \binom{n}{r-1} x^{n-r+1} = \frac{1}{(1-x)^r}$.

b) Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. Soit X le rang du r -ème succès. Quelle est la loi de X ? Déterminer $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(X(X+1))$ et $\mathbf{V}(X)$.

345. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ .

a) Montrer que $\mathbf{P}(X \geq \lambda + 1) \leq \lambda$.

b) Montrer que $\mathbf{P}\left(X \leq \frac{\lambda}{3}\right) \leq \frac{9}{4\lambda}$.

346. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs strictement positives indépendantes et suivant la même loi. Montrer que $\mathbf{E}(X/Y) \geq 1$.

347. a) Montrer qu'il existe une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}$.

b) Si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}^*$ est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on définit le *taux de défaillance* de X pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $x_n = \mathbb{P}(X = n | X \geq n)$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}(X \geq n) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k)$.

d) En déduire $\mathbb{P}(X = n)$ en fonction des x_k pour $n \in \mathbb{N}^*$.

e) Quelle variable aléatoire admet un taux de défaillance constant à partir du rang 1 ?

f) Calculer le taux de défaillance de la variable Y introduite à la première question.

348. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0, 1[$ tel que la série $\sum p_n$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit X_n une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p_n . On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n X_k \text{ et } S = \sum_{k=0}^{+\infty} X_k.$$

a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer l'événement $(S \geq k)$ à l'aide des événements $(S_n \geq k)$. En déduire que S est une variable aléatoire.

b) Montrer que S est presque-sûrement finie.

c) Montrer que S admet une espérance et la calculer.

349. Soient $p \in]0, 1[$ et $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi géométrique de paramètre p .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

a) Montrer que $\mathbf{E}(M_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} 1 - (1 - q^k)^n$ où $q = 1 - p$.

b) Soit $f_n : t \mapsto 1 - (1 - q^t)^n$. Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et donner un équivalent de $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

c) En déduire un équivalent de $\mathbf{E}(M_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Centrale – PC

Algèbre

350. a) Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^3 + 1)P(X)$.

b) Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$.

351. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$. On pose $A_0 = 1$ et $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $A_k = \frac{1}{k!} X(X - ka)^{k-1}$.

a) Montrer que la famille $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

- b)** Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $A'_k(X) = A_{k-1}(X - a)$.
- c)** En déduire, pour j et k éléments de $\{0, 1, \dots, n\}$, la valeur de $A_k^{(j)}(ja)$.
- d)** Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ dans $\mathbb{C}$ tels que $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k A_k$. Montrer que, pour tout $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\alpha_j = P^{(j)}(ja)$.
- e)** En déduire que $\forall (a, x, y) \in \mathbb{C}^3$, $(x + y)^n = y^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x(x - ka)^{k-1} (y + ka)^{n-k}$.

352. Soient $n \geq 2$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $\Omega_n = \left(\omega^{(\ell-1)(m-1)} \right)_{1 \leq \ell, m \leq n}$.

- a)** Exprimer $\det(\Omega_n)$ à l'aide des ω^k sous forme de produit.
- b)** Calculer $\Omega_n \overline{\Omega_n}$. En déduire $|\det(\Omega_n)|$.
- c)** On rappelle que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Calculer $\sum_{1 \leq \ell < k \leq n} (k + \ell)$.
- d)** Calculer $\det(\Omega_n)$.

353. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit p un projecteur de E de rang $r \leq n - 1$. Soit $\Phi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\Phi(f) = \frac{1}{2}(f \circ p + p \circ f)$.

- a)** Calculer Φ^2 et Φ^3 .
- b)** Montrer que Φ est diagonalisable.
- c)** Trouver les valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres de Φ .

354. On note $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Soit Φ l'application qui à $f \in E$ associe $\Phi(f)$ définie par $\forall x \in [0, 1]$, $\Phi(f)(x) = \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt$.

- a)** Vérifier que Φ est un endomorphisme de E .
- b)** Déterminer le noyau et l'image de Φ .
- c)** Déterminer les éléments propres de Φ .

355. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ et $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Donner une

condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

356. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable.

- a)** Montrer que, si $k \in \mathbb{N}$ est impair, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A^k) = A$.
- b)** Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de A pour qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A^2) = A$.

357. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable ayant n valeurs propres distinctes. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$.

- a) Montrer que g est diagonalisable.
- b) Montrer qu'il existe $P \in K_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.
- c) Trouver $\dim(\mathcal{C}(f))$ où $\mathcal{C}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E), f \circ h = h \circ f\}$.

358. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

- a) La matrice $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ est-elle diagonalisable ?
- b) Montrer que la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si A l'est.

359. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on définit les applications linéaires

$$D : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{cases}, \Delta_k : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & D^k(P)(0) \end{cases} \quad \text{ainsi que les} \\ \text{polynômes } H_0 = 1 \text{ et } H_k = \frac{X(X-1) \cdots (X-k+1)}{k!}.$$

- a) L'endomorphisme D est-il diagonalisable ?
- b) Montrer que $(\Delta_0, \dots, \Delta_n)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

360. Soient $n \geq 2$, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- a) On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E . Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u possède n valeurs propres distinctes.
- b) On suppose que u possède n valeurs propres distinctes. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E .
- c) Supposons que les seuls sous-espaces de E stables par u sont $\{0\}$ et E . Montrer que, pour tout x non nul, la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E .

361. Si A et B sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$.

- a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- b) Montrer que, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.
- c) Montrer que le sous-espace des matrices symétriques et celui des matrices antisymétriques sont supplémentaires et orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

362. Soit E un espace euclidien de dimension finie $n > 2$. Soit a un vecteur de E de norme 1. Soit $k \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in E$, on pose $f(x) = x + k \langle a, x \rangle a$.

- a) Montrer que f est un endomorphisme diagonalisable.
- b) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f .
- c) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $g \in \mathcal{S}(E)$ tel que $g^2 = f$.

363. Soit E un espace euclidien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est une similitude s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda \|x\|$.

- a) Montrer que f est une similitude si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $g \in \mathcal{O}(E)$ tels que $f = \lambda g$.
- b) Montrer que f est une similitude si et seulement si f préserve l'orthogonalité : $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = 0 \implies \langle f(x), f(y) \rangle = 0$.

364. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$.

a) Montrer que, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A^T\| = \|A\|$, $\|A^T A\| = \|AA^T\|$ et $|\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|$.

b) Soient A et B deux matrices orthogonales telles que $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$ est orthogonale. Montrer que $A = B$.

365. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soit ℓ une forme linéaire non nulle sur E .

a) Montrer qu'il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\forall x \in E$, $\ell(x) = \langle a, x \rangle$.

b) Pour $x \in E$, on pose $f(x) = \ell(x)a - \ell(a)x$. Déterminer $\text{Ker } f$.

c) Montrer que $\text{Ker}(\ell)$ est un sous-espace propre de f .

d) Montrer que f est diagonalisable.

e) Montrer que f est autoadjoint. Commenter.

366. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .

a) Montrer que $\mathbb{R}^n = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.

b) Montrer que A est semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où C est une matrice carrée inversible de taille paire.

367. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$.

a) Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = 2XP' - P''$. Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer les valeurs propres de f .

368. Soit $n \geq 2$. On pose $A = (\min\{i, j\})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Trouver une matrice B triangulaire supérieure telle que $A = B^T B$.

b) Montrer que A est inversible.

c) Montrer que les valeurs propres de A sont strictement positives.

369. Soit E un espace euclidien.

a) Soit u un endomorphisme autoadjoint positif. Soit $x \in E$. Montrer que $\langle x, u(x) \rangle = 0$ si et seulement si $x \in \text{Ker}(u)$.

b) Soient a et b deux endomorphismes autoadjoints positifs.

i) Montrer qu'il existe h autoadjoint positif tel que $h^2 = b$.

ii) On pose $f = ab$ et $g = hah$. Montrer que g est diagonalisable.

iii) En remarquant que $f = (ah)h$ montrer que f et g ont les mêmes valeurs propres et que les sous-espaces propres associés ont même dimension. Qu'en conclure sur f ?

370. On veut montrer le théorème spectral. Soit $n \geq 2$.

a) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ irréductible et unitaire. Montrer que $P(S)$ est inversible (sans utiliser le théorème spectral).

b) En déduire une démonstration du théorème spectral.

Analyse

371. Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) La matrice T est-elle diagonalisable ?
 b) La matrice T est-elle la limite d'une suite de matrices diagonalisables ?
 c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $c > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq c |\operatorname{Im}(z)|$.
 d) Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} A$. Montrer que A est trigonalisable.

372. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{n \ln^2(n)}$. Montrer que $\sum u_n$ converge. Quelle est la nature de $\sum u_n^{1 - \frac{1}{\ln(\ln(n))}}$

373. a) Montrer la convergence et calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

b) On pose $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Montrer que la série $\sum v_n$ converge.

c) Étudier la convergence de la série $\sum \ln \left(\tan \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right) \right)$.

374. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ une fonction continue.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $a_0, \dots, a_{n-1}$ dans $[0, 1]$ tels que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \int_0^{a_k} f(t) dt = \frac{k}{n} \int_0^1 f(t) dt.$$

b) Étudier la nature de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k$.

c) On suppose maintenant que $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ est continue et que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est divergente. Soit $(b_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer qu'il existe une suite $(v_n)_{n \geq 0}$ telle que $v_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \int_{v_n}^{v_{n+1}} f(t) dt$.

d) Étudier la nature de la suite $(v_n)_{n \geq 0}$.

375. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$, strictement croissante, concave, telle que $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$. On considère $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(f(t))}{t} dt$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(f(k))}{k}$.

a) On prend $f = \operatorname{id}_{\mathbb{R}^{+*}}$. Montrer par une intégration par parties que I converge.

- b)** On prend $f : t \mapsto 10 \ln(t)$. Trouver une primitive de $u \mapsto \frac{\sin(\ln(u))}{u}$ et en déduire la nature de I .
- c)** On prend $f : t \mapsto t^\alpha$ avec $\alpha > 0$. Pour quelles valeurs de α les conditions de l'énoncé sont-elles respectées ? Déterminer alors la nature de I sous ces conditions.
- d)** Tracer le graphe de $n \mapsto S_n$ pour $n \in \llbracket 1, 1000 \rrbracket$ lorsque $f(t) = t^\alpha$ avec $\alpha = 0,5$ puis $\alpha = 0,8$.
- e)** Idem pour $f(t) = 10 \ln(t)$.
- f)** Établir une conjecture.

On suppose maintenant que $f(t) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^\beta}\right)$ avec $\beta > 0$.

- g)** Quelles fonctions ont cette propriété parmi celles déjà rencontrées dans l'énoncé ?

h) Montrer que, pour $n \geq 1$ et $t \in [n, n+1]$, $\left| \frac{\sin(f(t))}{t} - \frac{\sin(f(n))}{n} \right| \leq \frac{f'(n)}{n} + \frac{1}{n^2}$.

- i)** Démontrer la conjecture.

376. Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de carré est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

- a)** Montrer que E est un espace vectoriel.

a) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $f' \in E$.

- b)** On suppose de plus que $f(0) = 0$.

Montrer que $\left(\int_0^{+\infty} f'(t)^2 dt \right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt \right) \left(\int_0^{+\infty} f''(t)^2 dt \right)$ et préciser le cas d'égalité.

377. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue de carré intégrable sur $]0, 1]$. Soit ℓ un réel strictement positif.

- a)** On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \int_0^x f(t)^2 dt = \ell$. Si f admet une limite en $+\infty$, quelle est cette limite ?

- b)** Trouver toutes les fonctions f telles que $\forall x > 0, f(x) \int_0^x f(t)^2 dt = \ell$.

- c)** On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \int_0^x f(t)^2 dt = \ell$. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

378. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que, pour tout $x > 0$, on ait $f''(x) > 0$ et $f(x+1) = xf(x)$.

- a)** Montrer que f' s'annule sur $]1, 2[$. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- b)** Montrer que f est de signe constant sur $\mathbb{R}^{+*}$ et préciser son signe.

- c)** Étudier la limite de f en $+\infty$.

- d)** Nature de $I = \int_1^{+\infty} f(t) dt$, $J = \int_0^1 f(t) dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(t)} dt$?

379. Soient $u_0 \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} : x \in [0, 1] \mapsto 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt$.

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite (u_n) .

380. a) Soit $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

Justifier que $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$ et $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$.

b) En déduire que $\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n} x(1-x)$.

c) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. On pose $B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

Montrer que $B_{n+1}(f)'(x) = (n+1) \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

En déduire que, si f est croissante (resp. convexe), $B_n(f)$ l'est aussi.

d) On pose $S(x) = \sum_{k=0}^n \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$. Montrer que $S(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$. En déduire

que, si f est de classe $\mathcal{C}^1$, il existe $c > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{[0,1]} |f - B_n(f)| \leq \frac{c}{\sqrt{n}}$.

e) Montrer que, si f est continue, $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n(f)(x) = f(x)$.

381. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

a) Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Établir une relation entre $F(x+1)$ et $F(x)$.

c) Donner un équivalent de F en 0 et en $+\infty$.

382. a) À l'aide d'une équation différentielle, développer en série entière $f : x \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) Quel est le rayon de convergence R de cette série entière ? Étudier la convergence de la série entière en $x = R$ et en $x = -R$.

383. a) Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge.

b) Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$ converge. On note $g(x)$ sa somme.

c) Trouver un équivalent de $g(x)$ lorsque $x \rightarrow 1^-$.

d) Soit $h : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ continue, décroissante, intégrable. Étudier la convergence de $S : t \mapsto \sum_{n \geq 1} h(nt)$. Donner un équivalent de $S(t)$ quand $t \rightarrow 0^+$.

384. Soit D_n le nombre de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sans point fixe.

a) Montrer que $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$.

b) Montrer que le rayon de convergence de $\sum \frac{D_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1.

c) On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$ et $g : x \mapsto f(x) e^x$. Calculer $g(x)$.

d) Écrire D_n sous la forme d'une somme et en déduire un équivalent de D_n .

385. On note a_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On pose $a_0 = 1$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$. En déduire que $a_n \leq n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que le rayon de convergence R de $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ est ≥ 1 .

c) On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

i) Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f .

ii) Résoudre l'équation différentielle et déterminer f .

iii) En déduire une formule pour exprimer a_n en fonction de n .

386. a) Soit $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de limite nulle. Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $na_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. On pose $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

b) Montrer que F est bien définie sur $] -1, 1[$.

c) On suppose que $\sum a_n$ converge et que $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \ell$.

d) Ce résultat reste-t-il vrai si on suppose seulement que $(na_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ?

387. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \cos^2(nx)} = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \cos^2(x)}$ et calculer leur valeur.

b) Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et croissante. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{f(x)}{1 + \cos^2(nx)} dx$.

388. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^n}$

a) Déterminer la limite de la suite (I_n) , notée ℓ . Donner un équivalent de $I_n - \ell$.

b) Justifier l'existence de $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ et montrer que $J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

c) En déduire un développement asymptotique à trois termes de I_n .

389. Soient $a, b > 0$.

a) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+nb)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}} dt.$

b) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt.$

c) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$

390. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}.$

a) En utilisant la série de fonctions $\sum f_n$, calculer si elle existe la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$

b) On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$ Calculer $\int_0^{+\infty} \ln(1+e^{-x}) dx.$

c) Équivalent de $\int_0^{+\infty} \ln(1+e^{-nx}) dx$ lorsque $n \rightarrow +\infty.$

391. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx} dt.$

a) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}.$

b) On donne $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$ Calculer $f(0).$

c) Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles

392. On pose $f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{it}}{x^2+t^2} dt.$

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}.$

b) Montrer que $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{u^2+1} du.$ En déduire la limite de f en 0.

c) Calculer le laplacien de $(x, t) \mapsto \frac{x}{x^2+t^2}.$

d) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et qu'elle est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

e) Donner une expression simple de $f.$

393. Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} dt.$

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Sur quel ensemble f est-elle continue ?

c) Sur quel ensemble f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? Calculer $f'.$

394. On pose $J_n : x \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x \sin t) dt$

- a) Montrer que J_n est de classe $\mathcal{C}^2$.
 b) Déterminer une équation différentielle vérifiée par J_n .
 c) Déterminer les solutions développables en série entière de cette équation différentielle.

395. Soient $\alpha \in]0, 1[$ et $I : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{ixt} e^{-t} dt$.

- a) Montrer que I est définie sur $\mathbb{R}$. Exprimer I en fonction de I_0 et de fonctions usuelles.
 b) Trouver un équivalent de I en $\pm\infty$. Exprimer le développement asymptotique de I à l'ordre 2.

396. Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} dt$.

- a) Donner le domaine de définition de f . Montrer que f est continue sur ce domaine.
 b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
 c) Calculer $f(x)$.

397. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} dt$.

- a) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.
 c) Discuter la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$.

398. Soit E l'espace des fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}$. On munit E de la norme $\| \cdot \|_1$ définie par $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$. Soit B l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$. On munit B de la norme $\| \cdot \|_{\infty}$. Si $f \in E$, on définit $\hat{f}$ par $\forall t \in \mathbb{R}, \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixt} dx$.

- a) Montrer que l'application $\Phi : E \rightarrow B, f \mapsto \hat{f}$ est bien définie et qu'elle est continue.
 b) Pour tout $\alpha > 0$, on pose $f_{\alpha} : x \mapsto e^{-\alpha x^2}$. Montrer que $\hat{f}_{\alpha}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On donne $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Donner une expression de $\hat{f}_{\alpha}(t)$ pour tout réel t .

399. Soit $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 2, 3)$. Soit $\Sigma = \left\{ \sum_{i=0}^3 (x_i - P(i))^2, P \in \mathbb{R}_2[X] \right\}$. Montrer que Σ admet un minimum et le déterminer.

400. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$.

- a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et calculer ∇f .
 b) Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$ et exprimer le point x^* où ce minimum est atteint.

401. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Pour $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, on note $B(a, r)$ [resp. $\overline{B}(a, r)$ et $\partial B(a, r)$] la boule ouverte de centre a et de rayon r [resp. la boule fermée et la frontière de la boule]. Soit $f : \overline{B}(a, r) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\overline{B}(a, r)$ et

de classe $\mathcal{C}^2$ sur $B(a, r)$. Pour $x \in B(a, r)$, on définit $\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$.

a) On suppose $\Delta f > 0$ sur $B(a, r)$. Montrer que f atteint un maximum et que celui-ci ne peut pas être atteint en un point de $B(a, r)$.

b) On suppose $\Delta f \geq 0$ sur $B(a, r)$. Montrer que $\sup_{x \in \overline{B}(a, r)} f(x) = \sup_{x \in \partial B(a, r)} f(x)$.

Ind. Pour $\varepsilon > 0$, considérer $\tilde{f}_\varepsilon : x \mapsto f(x) + \varepsilon \|x - a\|^2$.

Probabilités

402. Dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N , on pioche n boules avec $n \leq N$ (en une seule fois). On note X la variable aléatoire qui donne le maximum des numéros des boules tirées.

a) Donner la loi de X .

b) Montrer que $\sum_{k=n}^N \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$.

c) En déduire l'espérance de X .

d) Déterminer la variance de X .

403. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = n) > 0$ et que la loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$ est la loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, n\}$.

a) Exprimer la loi de Y en fonction de celle de X . Montrer que Y et $X - Y$ suivent la même loi.

b) On pose $Z = Y + 1$ et on suppose que Z suit la loi géométrique de paramètre p .

i) Déterminer la loi de X .

ii) Montrer que les variables aléatoires Y et $X - Y$ sont indépendantes.

c) Réciproquement, montrer que si les variables Y et $X - Y$ sont indépendantes alors $Z = Y + 1$ suit une loi géométrique.

404. Une particule, initialement placée en 0, se déplace à chaque instant de manière équiprobable d'une unité vers la gauche ou vers la droite, indépendamment des déplacements précédents. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de la particule à l'instant n .

a) Déterminer l'espérance et la variance de X_n .

b) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \{-k, \dots, k\}$. Exprimer $\mathbf{P}(X_{2k} = 2\ell)$.

405. Un chocolatier met des images dans ses tablettes de chocolat. Il y a N images différentes et, à chaque achat, on obtient uniformément et indépendamment une des images. Soit X_k le nombre de tablettes achetées pour obtenir k images différentes.

a) Quelle est la loi de $X_{k+1} - X_k$? Calculer $\mathbf{E}(X_k)$.

b) Donner un équivalent de $\mathbf{E}(X_N)$ quand N tend vers l'infini.

c) Trouver de même un équivalent de $\sigma(X_N)$.

406. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme $\{-1, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

a) Calculer la loi de $|S_{2n}|$.

b) Montrer que $\mathbf{E}(|S_{2n}|) = \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{\ell=n+1}^{2n} \binom{2n}{\ell}$.

c) Montrer que : $\sum_{\ell=n+1}^{2n} \binom{2n}{\ell} = 2^{2n-1} - \frac{1}{2} \binom{2n}{n}$. Calculer $\sum_{\ell=n+1}^{2n} \ell \binom{2n}{\ell}$.

407. On considère une matrice aléatoire $A_n = (X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où les $X_{i,j}$ sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $D_n = \det(A_n)$.

a) Déterminer $\mathbf{E}(D_n)$.

b) Montrer que $\mathbf{V}(D_n) = n!$ par récurrence sur n .