Épreuves orales des concours d'entrée aux grandes écoles

Écoles Normales Supérieures – PC

Algèbre

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le module de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2i\pi k^2}{n}\right)$.

2. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $\operatorname{tr}(A^2) \leqslant \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2$. Cas d'égalité ?

3. Soient $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $(D+F)^k$.

4. Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ telle que : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\phi(AB) = \phi(BA)$. Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\phi = \beta \operatorname{tr}$.

5. Soit $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^n$. Existe-t-il nécessairement $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ tel que : $\operatorname{tr}\left(\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i A_i\right)^2\right) \geqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \operatorname{tr}\left(A_i^2\right)$?

6. Soit $R : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ définie par $R(0) = 0$ et, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n, $R(P) = X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right)$.
a) L'application R est-elle linéaire ? bijective ?
b) Trouver tous les polynômes P tels que $R(P') = R(P)'$.

7. Soient M et $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = N^2 = 0$ et $MN + NM = I_2$.

Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $M = PE_{1,2}P^{-1}$ et $N = PE_{2,1}P^{-1}$.

8. Soit $(A_1, \ldots, A_m) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^m$ tel que, $\forall (i,j) \in [\![1,m]\!]^2$, $A_iA_j \in \{A_1, \ldots, A_m\}$. Montrer que $|\det(A_j)| = 1$ pour tout $j \in [\![1,m]\!]$.

9. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. On pose $f_N : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} t^k N^k$.

a) Montrer que f_N est bien définie sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que si f_N s'annule alors $N = 0$.

10. Soient $A, B \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note, pour $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $[X,Y] = XY - YX$. Montrer que $[[A,B]^2, C] = 0$.

11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $E = \{AM,\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$. Déterminer la dimension de E.

12. ***a)*** Soient A, B, C des espaces vectoriels. On note $A \xrightarrow{f_1} B \xrightarrow{f_2} C$ lorsque $f_1 \in \mathcal{L}(A,B)$, $f_2 \in \mathcal{L}(B,C)$ et $\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Ker}(f_2)$. Que peut-on dire si $A = \{0\}$? si $C = \{0\}$?
b) Soient A, B, C, D, E, F des espaces vectoriels. On suppose que

$$\begin{array}{ccccccccc}
\{0\} & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{f_2} & C & \longrightarrow & \{0\} \\
 & & \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \\
\{0\} & \longrightarrow & D & \xrightarrow{g_1} & E & \xrightarrow{g_2} & F & \longrightarrow & \{0\}
\end{array}$$

où h_1 et h_3 sont des isomorphismes et où $h_2 \circ f_1 = g_1 \circ h_1$ et $h_3 \circ f_2 = g_2 \circ h_2$.
Montrer que h_2 est un isomorphisme.

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $P_1, \ldots, P_k$ des éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui ne sont pas des monômes tels que $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\exists i \in [\![1,k]\!]$, $P_i(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

14. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $\mathrm{rg}\, A = p$ et $\mathrm{rg}\, B = q$. Déterminer les valeurs possibles de $\mathrm{rg}(AB)$.

15. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ sans valeur propre complexe commune.
Montrer que $\Phi : M \mapsto AM - MB$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

16. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ avec $n > p > \mathrm{rg}(A)$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Déterminer les $x \in \mathbb{R}^p$ tels que $\|Ax - b\| = \min_{y \in \mathbb{R}^p} \|Ay - b\|$.

17. Soient E un espace euclidien et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs orthogonaux qui commutent. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur orthogonal.

18. Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On pose $M = \left(\begin{array}{c|c} A & x \\ \hline x^T & a \end{array}\right)$.
On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A et $\mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n \leqslant \mu_{n+1}$ les valeurs propres de M. Montrer que $\mu_1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n \leqslant \lambda_n \leqslant \mu_{n+1}$.

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Lorsque $(A,B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$, on note $A \leqslant B$ si $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

On pose $\Phi : A \mapsto A^T A$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que Φ est convexe, c'est-à-dire : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $\Phi\left((1-\lambda)A + \lambda B\right) \leqslant (1-\lambda)\Phi(A) + \lambda \Phi(B)$.

Analyse

20. Caractériser les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe $X \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|M^n X\| = +\infty$.

21. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ on définit $[A,B] = AB - BA$. Soient A et B dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de matrices définie par $F_0 = B$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $F_{p+1} = [A, F_p]$.
a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, il existe des réels $c_{0,n}, c_{1,n}, \ldots, c_{n,n}$ tels que
$F_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} c_{i,n} A^{n-i} B A^i$.
b) Soit $A \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que la suite (F_n) tende vers la matrice nulle, et ce quelle que soit la matrice B à partir de laquelle la suite (F_n) a été construite.

22. Soit $\gamma \in \left]0,1\right]$. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} \leqslant x_n + x_n^{1-\gamma}$. Montrer qu'il existe $d > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant d n^{1/\gamma}$.

23. Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles.
a) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_{n+1} - x_n$. Si $y_n \to 0$, la suite (x_n) converge-t-elle nécessairement ?
b) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_{n+1} - \dfrac{1}{2} x_n$. Montrer que, si $y_n \to 0$, alors $x_n \to 0$.

24. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x_{n,N})_{(n,N)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double réelle.
On suppose que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n,N} = \alpha$. Montrer qu'il existe $(N_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ croissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n,N_n} = \alpha$.

25. Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ diverge.
a) Montrer que $\displaystyle\sum \frac{u_n}{(u_1 + \cdots + u_n)^2}$ converge.
b) Montrer que $\displaystyle\sum \frac{u_n}{u_1 + \cdots + u_n}$ diverge.
c) Soit $(x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. On suppose, que pour toute $(y_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$, la convergence de $\sum y_n^2$ implique celle de $\sum x_n y_n$. Montrer que $\sum x_n^2$ converge.

26. Soient $a > 0$ et $f \in C^0(\left[0,+\infty\right[, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - 1| < \dfrac{1}{1+x^2}$.
Montrer qu'il existe $g \in C^0(\left[0,+\infty\right[, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)\, g(x+a)$.

27. *a)* Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ continues telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

b) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ continues telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(xy) = f(x)\,f(y)$.

28. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ telle que f'' est bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f'(x))^2 \leqslant C f(x)$.

29. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f, f' et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left| \dfrac{f(x+\varepsilon) - f(}{\varepsilon}\right.$
0.

30. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui tend vers 0 en $-\infty$ et en $+\infty$ et telle que la famille de fonctions $(f,\ x \mapsto f(x+1),\ x \mapsto f(x+2))$ est liée. Que dire de f ?

31. Déterminer les $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = \dfrac{n}{2} \displaystyle\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

32. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ intégrable.
On suppose que : $\forall x \in [a, b],\ f'(x) \geqslant 1$. Peut-on avoir $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f = \frac{(b-a)^2}{2}$?

33. Trouver toutes les $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^{+*})$ telles que $\displaystyle\int_0^1 f = \int_0^1 \frac{1}{f} = 1$.

34. Soient $a < b$ deux réels.
a) Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]), \mathbb{R})$ telle que $|\varphi'| \geqslant 1$ et $\varphi'' > 0$.
Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $\left| \displaystyle\int_a^b \cos(\lambda \varphi(x))\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \dfrac{4}{\lambda}$.
b) Montrer que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ et pour tout $\alpha > 0$, si $|\varphi'| \geqslant \alpha$ et $\varphi'' > 0$ alors $\left| \displaystyle\int_a^b \cos(\lambda \varphi(x))\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \dfrac{4}{\alpha\lambda}$.
c) Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\varphi'' \geqslant 1$.
Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $\left| \displaystyle\int_a^b \cos(\lambda \varphi(x))\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \dfrac{8}{\sqrt{\lambda}}$.
d) Soit $\varphi \in C^k([a, b], \mathbb{R})$, où $k \in \mathbb{N}^*$, telle que $\varphi^{(k)} \geqslant 1$.
Trouver $C > 0$ et $\alpha > 0$ tels que $\forall \lambda > 0$, $\left| \displaystyle\int_a^b \cos(\lambda\varphi(x))\mathrm{d}x \right| \leqslant \dfrac{C}{\lambda^\alpha}$.

35. Soit E un sous-espace vectoriel de dimension 4 de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions bornées et $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de carré intégrable.
a) On suppose qu'il existe un sous espace vectoriel G de E constitué de fonctions bornées sur $\mathbb{R}^+$ tel que $E = \mathrm{Vect}(x \mapsto e^x) + \mathrm{Vect}(x \mapsto e^{-x}) + G$ et que la seule fonction dans G qui soit de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$ est la fonction nulle. Montrer que $E \cap L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{0\}$.

b) On suppose que E vérifie les hypothèses de la question ***a)*** et qu'on dispose de deux sous-espaces F_1 et F_2 de E tels que $\dim F_1 = \dim F_2 = 2$, que toutes les fonctions de F_1 sont bornées sur $\mathbb{R}^-$, et que la seule fonction de F_2 bornée sur $\mathbb{R}^-$ est la fonction nulle.
Montrer que $\dim(E \cap L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = 1$.

36. On définit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = e^{-x}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f_n(t+1)}{1+t^2}\, e^t \,\mathrm{d}t.$
a) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
b) Montrer que $\sum f_n$ converge sur un intervalle $[x_0, +\infty[$, où x_0 est judicieusement choisi.

37. ***a)*** Soient f une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et J une partie finie de $\mathbb{N}$. On suppose que $f^{(i)}(0) = 0$ si $i \notin J$ et $f^{(i)}(1) = 0$ si $i \in J$. Que dire de f ?
b) La propriété est-elle encore vérifiée si J est une partie infinie de $\mathbb{N}$?

38. Pour $a > 0$, on pose $f(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+a^2x^2}}.$
a) Justifier la définition de $f(a)$.
b) Montrer que $f(a) \underset{a\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{\ln a}{a}\right).$

39. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx)\, \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{1}{4}x^2\right).$

40. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner un équivalent de $A_n(t) = \displaystyle\int_0^1 \sin^2(xt)\, x^{n-2}\,\mathrm{d}x$ lorsque $t \to +\infty$.

41. Soit $h \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $h(0) = h(1) = 0$ et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto h(x)\, \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.
Soit $g : y \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^1 |x-y|\, f(x)\,\mathrm{d}x.$
a) Montrer que g est deux fois dérivable et que $\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = 2\, f(x)$.
b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que g soit bornée.

42. Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ |h(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+|x|}$ et $|h'(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+|x|^2}$. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $\varphi(x,y) = \dfrac{h(x)-h(y)}{x-y}$ si $x \neq y$, et $\varphi(x,y) = h'(x)$ sinon.

43. Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-y}\cos(xy)\,\mathrm{d}y.$
a) Calculer explicitement f.
b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dérivée k-ième de f est bornée par $k!$.
c) En quels points x y a-t-il égalité entre $k!$ et $|f^{(k)}(x)|$?

44. ***a)*** Donner les solutions de l'équation différentielle : $x'' - x = \cos(2t)$.
b) Soient $c > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(t) = 0$ pour tout t vérifiant $|t| \geqslant c$.
Montrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle $x'' - x = f(t)$ vérifiant $\lim\limits_{t \to \pm\infty} x(t) = 0$.

Géométrie

45. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $a > 0$.
On pose $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ y \geqslant f(x)\}$ et $\mathcal{C} = \{(x, f(x)) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$. Soient v un vecteur non nul du plan, $X \in E$ et $\Delta = \{X + \lambda v \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\Delta \cap \mathcal{C}$ est non vide.

46. ***a)*** Soit ABC un « vrai » triangle tel que $\widehat{ABC}$ soit aigu (et non droit).
Montrer que : $AC^2 < AB^2 + BC^2$.
b) Soient e_1, e_2 et e_3 des vecteurs non nuls orthogonaux de $\mathbb{R}^3$. On pose : $d_1 = \{te_1 \ ; \ t > 0\}$, $d_2 = \{te_2 \ ; \ t > 0\}$, $d_3 = \{te_3 \ ; \ t > 0\}$. Montrer que tout triangle $A_1A_2A_3$, où $A_i \in d_i$, est aigu, c'est-à-dire que ses trois angles sont aigus.

Probabilités

47. Deux joueurs de tennis sont de même niveau. Ils disputent un match. Quelle est la probabilité que le match se termine par un tie-break ?

48. On lance n fois une pièce avec une probabilité p d'obtenir face. On pose A_n : « on n'obtient jamais deux faces de suite ». Donner un équivalent de $\mathbf{P}(A_n)$.

49. On considère une urne contenant initialement $n + 1$ boules : n blanches et une rouge. On tire une par une des boules dans l'urne. Si on tire la boule rouge, on s'arrête, sinon on a une chance sur deux de remette la boule et continuer, une chance sur deux de s'arrêter.
On pose X_n le nombre de boules tirées lorsque l'on s'arrête. Donner $\mathbf{E}(X_n)$.

50. Soit N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On lance N fois une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité qu'on obtienne un nombre pair de face ?

51. Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ muni de la probabilité uniforme.
a) Donner la loi de la variable aléatoire K qui donne la taille du cycle contenant 1.
b) Déterminer l'espérance et la variance du nombre N de cycles.

52. Soit σ une permutation aléatoire de $[\![1, 2n]\!]$ suivant la loi uniforme.
On pose $Y = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} |\sigma(2i) - \sigma(2i + 1)|$. Calculer $\mathbf{E}(Y)$.

53. Soient Y, Z deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Montrer que si, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, $\mathbf{E}\left(P(Y)\, Q(Z)\right) = \mathbf{E}\left(P(Y)\right) \mathbf{E}\left(Q(Z)\right)$, alors Y et Z sont indépendantes.

54. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_0, \ldots, A_d$ des variables aléatoires indépendantes. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A_k suit la loi géométrique de paramètre $1/(k+1)$. On note $P = \sum_{k=0}^{d} A_k X^k$ et R la variable aléatoire la loi telle que, conditionnellement à un tirage donné de $(A_0, \ldots, A_n)$, toute racine z de P de multiplicité m_z soit atteinte avec probabilité m_z/d. Calculer $\mathbf{E}(R)$.

55. Soit $a > 0$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f'' \geqslant 2a$. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles et admettant une variance.
Montrer que $\mathbf{E}(f(X)) - f(\mathbf{E}(X)) \geqslant a\mathbf{V}(X)$.

56. Un mobile se déplace sur l'axe des réels. Soit $\varepsilon > 0$. Son mouvement est décrit par une fonction x dérivable sur tous les intervalles $]n, n+1[$ et y vérifiant $x'(t) = \varepsilon x(t)$, admettant en chaque $n \in \mathbb{N}^*$ une limite finie à gauche $x(n^-)$ et une limite finie à droite $x(n^+)$, et telle que $x(0) = 0$.
Soit $T \in \mathbb{N}$. À chaque instant $t = n \in [0, T]$, on lance une pièce équilibrée. Si on fait Pile $x(n^+) = x(n^-) + n$, si on fait Face $x(n^+) = x(n^-) - n$, avec la convention $x(0^-) = 0$.
Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ assez grand tel que, pour tout $T \in \mathbb{N}$, x reste de signe constant sur $[0, T]$.

57. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathcal{U}\left([\![1, n]\!]^2\right)$. On note $X = (X_1, X_2)$. On pose $Y_0 = 0$ et, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $Y_{k+1}(\omega) = Y_k(\omega) + 2$ si $X_1(\omega) \leqslant k$ et $X_2(\omega) \geqslant Y_{X_1}(\omega)$, et $Y_{k+1}(\omega) = Y_k(\omega) + 1$ sinon.
a) Justifier que Y_k est bien définie pour $0 \leqslant k \leqslant n$.
b) Déterminer la limite de $\left(\dfrac{\mathbf{E}(Y_n)}{n}\right)$.

58. Soient n et d dans $\mathbb{N}^*$. On note $[\![-n, n]\!]^d$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^d$ dont les composantes sont des entiers compris entre $-n$ et n. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![-n, n]\!]^d$.
a) Déterminer $\mathbf{E}\left(\|X\|_1\right)$ et en trouver un équivalent lorsque $n \to +\infty$.
b) Déterminer $\mathbf{E}\left(\|X\|_\infty\right)$ et en trouver un équivalent lorsque $n \to +\infty$.

59. Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $[\![1, d]\!]$. On note $p_k = \mathbf{P}(X_1 = k)$. Soit N_k la variable aléatoire égale au nombre de fois que la valeur k est obtenue. Donner la matrice $(\mathrm{Cov}(N_i, N_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et préciser son rang.

60. ***a)*** Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
Montrer que, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, $\mathbf{E}\left(e^{\gamma X}\right) \leqslant e^{\gamma^2/2}$.
Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Soient $(c_n)_{n \geqslant 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_N = c_1 X_1 + \cdots + c_N X_N$.
b) Montrer que, pour tout $t > 0$, $\mathbf{E}(e^{tY_N}) \leqslant e^{t^2(c_1^2 + \cdots + c_N^2)/2}$.
c) Soit $\lambda > 0$. Montrer que $\mathbf{P}(|Y_N| > \lambda) \leqslant 2e^{-\frac{\lambda^2}{2(c_1^2 + \cdots + c_N^2)}}$.
d) Montrer que $N^{10}\,\mathbf{P}(|X_1 + \cdots + X_N| > N^{3/4}) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

École Polytechnique - ESPCI – PC

Algèbre

61. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P - P' = Q$. Montrer que, si $Q \geqslant 0$, alors $P \geqslant 0$.

62. Soit E l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{-1,0,1\}$ et A l'ensemble des racines des polynômes de E. Montrer que $A \cap \,]2,+\infty[\, = \emptyset$.

63. Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ et $r \in [0,1]$.
Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|P(re^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 r^{2k} \leqslant \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |P(e^{i\theta})|^2$.

64. Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré d et $\lambda_1,\ldots,\lambda_d$ ses racines. On suppose que, pour tout $k \in [\![1,d]\!]$, $|\lambda_k| \leqslant 1$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k^n$.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n)$ est entier.
b) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n+p) = f(n)$.

65. Soient A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose que, pour tout $k \in \{0,1,2,3,4\}$, $A + kB$ est inversible et que son inverse est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $A + 5B$ est inversible et que son inverse est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

66. On considère la matrice $A = (\mathbf{1}_{i=j+1 \bmod n})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $p \in \mathbb{N}^*$ pour que $B = \sum_{k=0}^{p-1} A^k$ soit inversible.

67. On considère une ferme avec $2n+1$ vaches. Le fermier s'aperçoit que quelle que soit la vache que l'on retire du troupeau, il peut séparer les vaches restantes en deux groupes de n vaches, de telle sorte que les sommes des poids des vaches de chacun des groupes sont égales. Montrer que toutes les vaches ont le même poids.

68. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $a_{i,j} = \frac{1}{\min(i,j)}$. Calculer $\det A$.

69. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A+H) = \det(A) + \det(H)$. Que dire de A ?

70. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
a) Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ des réels distincts. Soient $c_1,\ldots,c_p$ des réels non tous nuls. On pose $\varphi : x \mapsto \sum_{i=1}^{p} c_i e^{\alpha_i x}$. Montrer que φ s'annule au plus $p-1$ fois.
b) Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\beta_1,\ldots,\beta_p$ des réels tels que $\alpha_1 < \cdots < \alpha_p$ et $\beta_1 < \cdots < \beta_p$.

Montrer que le déterminant de la matrice $\left(e^{\alpha_i\beta_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ est strictement positif.

71. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB^2 - B^2A = B$. Montrer que B est nilpotente d'ordre impair.

72. ***a)*** Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ non diagonalisable.
b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $Q : x = (x_1 \ \dots \ x_n)^T \in \mathbb{C}^n \mapsto \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}x_ix_j \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une unique matrice $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $Q(x) = x^TSx$.
c) Montrer qu'il existe un ensemble fini I, une famille $(\ell_i)_{i\in I} \in (\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}))^I$ de formes linéaires indépendantes et une famille $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ telles que
$\forall x \in \mathbb{C}^n, \ \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}x_ix_j = \sum_{i\in I} \alpha_i\ell_i(x)^2.$
Ind. Commencer par traiter l'exemple $Q(x) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 6x_2^2 + 4x_3^2$.

73. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = 0$ et $u + v \in \mathrm{GL}(E)$.

74. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur M pour que l'application $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM + MA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ soit bijective.

75. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $\exp(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$.
a) Justifier que cette définition est pertinente.
b) On suppose que M s'écrit $M = I_n + A$ où A est nilpotente. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = \exp(P(M))$.

76. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
Pour $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on pose $H_v = I_n - 2\dfrac{vv^T}{\|v\|^2}$.
a) Donner une interprétation géométrique de H_v.
b) Montrer que, pour tout vecteur unitaire $e \in v^\perp$, on a $H_{v-\|v\|e}(v) = \|v\|\, e$.
c) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Donner un algorithme permettant de trouver $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux > 0 telles que $A = QR$.

77. Soient $E = [\![1, n]\!]$ et $A_1, \dots, A_m$ des parties distinctes de E telles qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ vérifiant : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j, \ \Rightarrow \ \mathrm{Card}(A_i \cap A_j) = c$. Montrer que $m \leqslant n$.
Ind. Considérer d'abord le cas où il existe i tel que $\mathrm{card}(A_i) = c$. Ensuite pour $i \in [\![1, m]\!]$, poser $v_i = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{A_i}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{1}_{A_i}(n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et considérer $G = (\langle v_i, v_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant m}$.

78. Soient $n, p \geqslant 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^n$.
a) Montrer que $\inf\{\|x - b\|, \ x \in E\}$ est atteint en un unique point de E.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\inf\{\|Ax - b\|,\ x \in \mathbb{R}^p\}$ est atteint. Si x_1 et x_2 sont deux points en lesquels le minimum est atteint, montrer que $x_2 - x_1 \in \operatorname{Ker} A$.
c) Résoudre l'équation $A^T Ax = A^T b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^p$.

79. Soit $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
a) Montrer qu'il existe des réels distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ et des matrices de projecteurs orthogonaux $P_1, \ldots, P_k$ de $\mathbb{R}^n$ tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} P_i = I_n$, $P_iP_j = 0$ si $i \neq j$ et $H = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$.
b) Soit $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{tr}(R) = 1$. On pose $p_i = \operatorname{tr}(RP_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$.
Montrer que $(p_1, \ldots, p_k)$ est une loi de probabilité sur $\{1, 2, \ldots, k\}$.

80. Soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det^{1/n}(A + B) \geqslant \det^{1/n}(A) + \det^{1/n}(B)$.

81. Soient $M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i^T M_i = I_p$.

Pour $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on pose $L(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i^T X M_i$.
On écrit $M \geqslant N$ pour signifier $M - N \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $L(X^T X) \geqslant L(X^T)L(X)$.

82. Soient $d \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $A \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$. On définit la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $A_0 = A$ et, pour $n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} = A_n + A_n^{-2}$. Donner un équivalent de $\operatorname{tr} A_n$ lorsque $n \to +\infty$.

83. ***a)*** Soit $(u_1, \ldots, u_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$. Montrer que l'on peut renuméroter les u_i pour qu'il existe $\alpha \in [\![1, k]\!]$ tel que la famille $(u_1, \ldots, u_\alpha)$ soit libre et $u_j \in \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_\alpha) = E$ pour tout $j \in [\![\alpha + 1, k]\!]$.
b) Soit $U = (u_1 | \cdots | u_\alpha) \in \mathcal{M}_{n,\alpha}(\mathbb{R})$. Montrer que $U^T U$ est inversible.
c) Soient $\beta \geqslant \alpha + 1$ et $B = \begin{pmatrix} \langle u_\beta, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle u_\beta, u_\alpha \rangle \end{pmatrix}$. Montrer que la solution de $U^T U X = B$ donne les coordonnées de u_β dans la base $(u_1, \ldots, u_\alpha)$ de E.
d) Soit $(v_1, \ldots, v_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$ telle que : $\forall (i, j) \in [\![1, k]\!]^2$, $\langle u_i, u_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$. Montrer qu'il existe $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $Wv_i = u_i$.

84. ***a)*** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ tels que $A = B^T B$.
Soient $n \geqslant 2$ et $\mathcal{L}$ un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Pour $A \in \mathcal{M}_{kn}(\mathbb{R})$ que l'on écrit $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k,1} & \ldots & A_{k,k} \end{pmatrix}$ où chaque bloc est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $\hat{\mathcal{L}}_k$ par $\hat{\mathcal{L}}_k(A) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(A_{1,1}) & \ldots & \mathcal{L}(A_{1,k}) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{L}(A_{k,1}) & \ldots & \mathcal{L}(A_{k,k}) \end{pmatrix}$.

On dit que $\mathcal{L}$ est C.P. (complètement positif) lorsque, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $A \in \mathcal{S}_{nk}^+(\mathbb{R})$, $\hat{\mathcal{L}}_k(A) \in \mathcal{S}_{nk}^+(\mathbb{R})$.
b) Montrer que $\mathcal{L} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas C.P.
c) Soit $\mathcal{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ complètement positif. En regardant le cas $k = 2$, montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}(M^T) = \mathcal{L}(M)^T$.

85. Soient $S, T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $X^T(S+T)X > 0$.
Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la famille (Se_i, Te_i) soit liée.
Ind. Considérer $B : (X, Y) \mapsto X^T(S+T)Y$ et $M = (S+T)^{-1}S$.

Analyse

86. Soit $A = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,;\, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\, m_{i,j} \in [0,1]^2 \right\}$.
On pose $\alpha = \sup\limits_{M \in A} (\det M)$.
a) Montrer que α est un maximum.
b) Montrer que ce maximum est atteint en des matrices M à coefficients dans $\{-1, 1\}$ telles que $\det M > 0$.

87. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\exp(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{A^k}{k!}$.
a) Montrer que $\exp(A)$ est bien définie.
Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.
b) Montrer que, si A et B commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.
c) Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(\exp\left(\dfrac{A}{2k}\right) \exp\left(\dfrac{B}{k}\right) \exp\left(\dfrac{A}{2k}\right) \right)^k = \exp(A+B)$.

88. On munit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}),\ \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ de la norme $\|\ \|_\infty$. Si $f \in E$, on pose $A(f) : x \in [0,1] \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t\,f(t)\,\mathrm{d}t$.
a) Trouver $C > 0$ tel que $\forall f \in E,\ \|A(f)\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty$.
b) Déterminer la constante C optimale.

89. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$. On pose
$$\mathrm{Conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\ ;\ n \in \mathbb{N}^*,\ (x_1, \ldots, x_n) \in A^n,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$
On suppose de plus que, pour tout $(x,y) \in A^2$, il existe $\gamma : [0,1] \to A$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Montrer que $\mathrm{Conv}(A) = \bigcup\limits_{(a,b) \in A^2} [a, b]$.

90. Soit E un espace vectoriel normé. On dit que $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ vérifie la propriété C si :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant N,\ \forall q \geqslant N,\ \|u_p - u_q\| \leqslant \varepsilon$. On dit que E vérifie la propriété B si toute suite de E vérifiant C est convergente. On admet que $\mathbb{R}$ vérifie la propriété B. On pose $\ell^1 = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\,;\ \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < +\infty\right\}$. On munit ℓ^1 de la norme définie par $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. Montrer que $(\ell^1, \|\ \|_1)$ vérifie la propriété B.

91. On munit $\ell^1 = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty\right\}$ de la norme définie par $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ et $\ell^\infty = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ ;\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M\}$ de la norme définie par $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

Enfin, pour $(u, v) \in \ell^1 \times \ell^\infty$, on pose $\varphi_v(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

a) Montrer que pour tout $v \in \ell^\infty$, φ_v est bien définie sur ℓ^1.
On note D_{ℓ^1} l'ensemble des formes linéaires sur ℓ^1 qui sont continues.
b) Montrer que pour tout $v \in \ell^\infty$, $\varphi_v \in D_{\ell^1}$.
On pose, pour $v \in \ell^\infty$, $\|\varphi_v\| = \inf\left\{C > 0\ ;\ \forall u \in \ell^1,\ |\varphi_v(u)| \leqslant C\|u\|_1\right\}$.
c) Montrer que $\|\ \|$ est une norme.
d) Calculer $\|\varphi_v\|$ pour $v \in \ell^\infty$.
Les question précédentes montrent que l'application T de ℓ^∞ dans D_{ℓ^1}, qui à v associe φ_v est une application linéaire et une isométrie.
e) Montrer que T est bijective.

92. *a)* Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe un unique $(N, D) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ tel que :
$i)$ $M = D+N$, $ii)$ D est diagonalisable, $iii)$ N est nilpotente, $iv)$ $ND = DN$.
b) Quels sont les points de continuité de $M \mapsto (D, N)$?

93. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{n^2 + k^2}$. Déterminer la limite de (nv_n).

94. On définit (u_n) par $u_0, u_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$. Montrer que (u_n) converge.

95. Soient $(a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \sqrt{\cdots + \sqrt{a_n}}}}$.

a) Montrer que, si $\lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geqslant n} \left\{\frac{\ln(\ln a_k)}{k}\right\} > \ln 2$, alors (t_n) diverge.
b) Montrer que, si $\lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geqslant n} \left\{\frac{\ln(\ln a_k)}{k}\right\} < \ln 2$, alors (t_n) converge.

96. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ strictement croissante, continue et telle que $f(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$. Montrer que les séries de termes généraux $\dfrac{1}{f(n)}$ et $\dfrac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.

97. Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\displaystyle\sum \frac{u_n}{S_n}$ converge.

98. Soient $(c_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} c_i x^i$. Montrer que, si $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{3}{2}$, alors $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ est irrationnel.

99. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer : $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i + x_j|}$.

100. Soit $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto e^{-1/x^2}$. Montrer que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

101. Soit $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $G(0) = G(1) = 0$, G est continue en 1 et dérivable en 0, $G'(0) \geqslant 0$ et, pour tout $x \in [0,1]$, on a $G(x) = \displaystyle\max_{y\in[0,x]} (G(y) + G(x-y))$.
Montrer que G est nulle.

102. Montrer que : $\displaystyle\sum_{\substack{p\leqslant x \\ \text{p premier}}} \frac{\ln p}{p} \geqslant \ln x + \mathrm{O}(1)$. *Ind.* Considérer $\ln(n!)$.

103. Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue à valeurs positives telle $\displaystyle\int_0^1 g = 1$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\phi'' \geqslant 0$.
Montrer : $\phi\left(\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \displaystyle\int_0^1 \phi\left(f(x)\right) g(x)\,\mathrm{d}x$.

104. Soient deux réels $a < b$ et $f, g \in \mathcal{C}^0\left([a,b], \mathbb{R}^{+*}\right)$ avec $f \neq g$.
On suppose $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_a^b \frac{f^{n+1}}{g^n}$.
a) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
b) Montrer $I_n \to +\infty$.

105. Soif $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}^+)$ telle que $f(0) = 0$ et $f'' \geqslant 0$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^2 f'(x)^2 \mathrm{d}x$.

106. Soient $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^{+*}$ et $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}^{+*}$ continues telles que : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 K(x,z)g(z)\mathrm{d}z$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 K(x,z)f(z)\mathrm{d}z$. Montrer que $f = g$.

107. Soient L^1 (resp. L^2) l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ intégrables (resp. de carré intégrable). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que $x \mapsto x\,f(x)$ et $x \mapsto x\,f'(x)$ sont dans L^2.
a) Montrer que $f \in L^2 \cap L^1$.
b) Montrer $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Montrer que $x \mapsto x\,f^2(x)$ est dans L^2.

108. Soit E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $x \mapsto (1+x^2)|f(x)|$, $x \mapsto (1+x^2)|f'(x)|$ et $x \mapsto (1+x^2)|f''(x)|$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose : $A_t(f) : x \mapsto f'(x) + txf(x)$ et $A_t^*(f) : x \mapsto -f'(x) + txf(x)$.
a) Si $f \in E$, montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} A_t^*\left(A_t(f)\right)\, f \geqslant 0$.
Ind. Montrer, pour $(f,g) \in E^2$, que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} A_t(f)\, g = \int_{\mathbb{R}} f\, A_t^*(g)$.
b) Soit $f \in E$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f^2 = 1$.
Montrer que $\displaystyle\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)\,\mathrm{d}x\right) \geqslant \frac{1}{4}$.

109. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^3 définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f_n^{(3)}(x)\right|\right) = c \in \mathbb{R}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| = 0$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n'(x)| = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n''(x)| = 0$.

110. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Soit $g : x \mapsto \dfrac{\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$.
a) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2\mathrm{d}x$.
c) Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - g(x))^2\mathrm{d}x$.
d) Expliciter g et tracer son graphe.

111. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit (f_n) la suite de fonctions définie par $f_0 = f$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x t\,f_n(t)\mathrm{d}t$.
a) Montrer que l'application T qui à f associe $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
b) Exprimer $T(f)$ à l'aide de f.
c) L'application T est-elle injective ? surjective ?

112. Soit $f : t \mapsto (1-t)^{1-1/t}$. Cette fonction est-elle développable en série entière ? Si oui déterminer le rayon de convergence et le signe des coefficients de ce développement en série entière.

113. Donner le développement en série entière de $f(x) = \dfrac{1}{1-2x-x^2}$ et son rayon de convergence. Montrer que les coefficients sont entiers. Pouvait-on le prévoir ?

114. On pose $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n(n-1)/2}}$. Montrer que f n'est pas le quotient de deux polynômes.

115. ***a)*** Donner le développement en série entière de $\arctan$ et montrer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.
b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 4\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Montrer : $\left|\pi - S_n - \dfrac{(-1)^n}{n}\right| \leqslant \dfrac{1}{2n^3}$.
c) Montrer que, pour $n = 5 \times 10^5$, π et S_n ont leurs 16 premières décimales communes, sauf pour la 6e .

116. ***a)*** Soit $f \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Soit $r > 0$. On suppose que f n' a pas de racine de module r. On note $N_r(f)$ le nombre de racines de f (comptées avec multiplicité) situées dans le disque de centre 0 et de rayon r. Montrer que $N_r(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} re^{i\theta} \mathrm{d}\theta$.
b) Soit $r > 0$. Soient f et g dans $\mathbb{C}[X]$ tels que, pour tout z de module r, $|g(z)| < |f(z)|$. Montrer que f et $f+g$ ont le même nombre de racines comptées avec multiplicité dans le disque de centre 0 et de rayon r.
c) Application : montrer que $X^8 - 5X^3 + X + 2$ possède 3 racines comptées avec multiplicité dans le disque unité.

117. Soit $A : \mathbb{C} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. On suppose que les coordonnées de A sont sommes de séries entières de rayon $+\infty$ et que $A(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ somme d'une série entière de rayon $+\infty$ telle que $\forall z \in \mathbb{C},\ A(z) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(z)) & -\sin(\varphi(z)) \\ \sin(\varphi(z)) & \cos(\varphi(z)) \end{pmatrix}$.

118. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que, pour tout $k \in \{0,\ldots,n-1\}$ la restriction γ_k de γ au segment $[a_k, a_{k+1}]$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue. On définit $\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(\gamma_j(t))\, \gamma_j'(t)\mathrm{d}t$.
Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ et f est développable en série entière sur $\mathbb{C}$, montrer que $\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

119. ***a)*** Montrer que, pour $x > 0$, $e^{-x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} x\, e^{-x^2(1+s^2)}\mathrm{d}s$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$.

120. ***a)*** Montrer que $\forall t \in [0,1[$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{1-te^{i\theta}}\mathrm{d}\theta = 0$.

b) En déduire que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|e^{i\theta}-z|\mathrm{d}\theta = \max(0, \ln|z|)$.

Ind. Considérer la fonction $f : t \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left(|z-te^{i\theta}|\right)\mathrm{d}\theta$.

121. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $x^+ = \max(x,0)$. Soit $\widehat{f} : \xi \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{i\xi x}\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que $\widehat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
b) Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=-k}^{k} e^{ijx} = \sum_{j=-N}^{N}\left(1-\frac{|j|}{N+1}\right)e^{ijx} = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2.$$

c) Pour $N \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, montrer que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2N+2}\left(\frac{\sin((N+1)x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \left(1-\frac{|k|}{2N+2}\right)^+.$$

d) Montrer que, uniformément en $k \in \mathbb{Z}$, la suite de terme général
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2N+2}\left(\frac{\sin((N+1)x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 e^{-ikx}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2N+2}\left(\frac{\sin((N+1)x)}{\frac{x}{2}}\right)^2 e^{-ikx}\,\mathrm{d}x$$
tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$. En déduire : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(\xi) = \pi\left(1-\dfrac{|\xi|}{2}\right)^+$.

122. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Justifier l'existence de $\exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!}$ *Ind.* Montrer l'existence d'une norme $\|\ \|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour laquelle il existe $c > 0$ tel que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leqslant c\|A\|\,\|B\|$.
b) Soit $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), t \mapsto \exp(tA)$. Montrer que M est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $M'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ continue et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Trouver toutes les fonctions $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dérivables telles que $\forall t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t) + Bu(t)$.
d) Existe-t-il $P \in \mathbb{R}[X]$ telle que $\exp(A) = P(A)$?

123. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $J(x) = \dfrac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$.

a) Montrer que J est strictement convexe :
$\forall x \neq y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in]0,1[, J(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda J(x) + (1-\lambda)J(y)$.
b) Montrer que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} J(x) = +\infty$.
c) Montrer que J atteint son minimum en l'unique point x_0 vérifiant $Ax_0 = b$.

124. Soit $n \geqslant 2$. On pose $\Sigma = \left\{ (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \; ; \; \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0 \text{ et } \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = 1 \right\}$.
Maximiser $S_n = a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1$ lorsque $(a_1, \ldots, a_n)$ décrit Σ.

Probabilités

125. Soit $\lambda > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_n = k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(X = k)$.

126. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'entiers naturels non nuls. On tire des dés équilibrés, le n-ième dé admettant a_n faces numérotées de 1 à a_n. On effectue les tirages tant que la suite des résultats est croissante. On note p la probabilité de faire une infinité de tirages. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour que p soit non nul.

127. On définit pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $e^A = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{A^k}{k!}$.
a) Montrer que e^A est bien défini.
Ind. On pourra montrer qu'il existe une norme $\| \ \|$ et une constante $C > 0$ telles que, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leqslant C\|A\| \, \|B\|$.
On note $R = \dfrac{1}{2} I_2$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
b) Calculer, pour $s, t \in \mathbb{R}$, $f(s,t) = \mathrm{Tr}(Re^{i(sR+yH)})$.
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^2$. On note $g(s,t) = \mathbf{E}(e^{i(sX+tY)})$.
c) Montrer que $\forall s_1, \ldots, s_m, \ t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{\ell=1}^{m} g(s_k - s_\ell, t_k - t_\ell) \geqslant 0 \qquad (\star)$
d) On prend $s_2 = s_3 = t_1 = t_3 = \dfrac{2\pi}{3}$ et $t_2 = s_1 = 0$. Montrer que f ne vérifie pas $(\star)$.
e) Soient $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{Tr}R = 1$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire réelle X telle que $\forall s \in \mathbb{R}, \ \mathrm{Tr}(Re^{isH}) = \mathbf{E}(e^{isX})$

128. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit S_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \geqslant 0$. Calculer $\mathbf{E}\left(e^{sS_n}\right)$.
b) Montrer que, pour tout réel a,

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant \exp\left(-n \sup_{s \geqslant 0} \left(as - \ln\left(pe^s + (1-p)\right)\right)\right).$$

c) Montrer qu'il existe une fonction $H \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}^{+*})$ ne dépendant pas de n telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp(-nH(\varepsilon)).$$

129. Une suite (Y_n) de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ est dite *transiente* si, pour toute partie bornée A de $\mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(Y_n \in A) < +\infty$.
Soient $\alpha > 0$ et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ on ait $X_i \sim \mathcal{P}\left(\dfrac{\alpha}{i}\right)$. On pose $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que (Y_n) est transiente.

130. Une suite (S_n) de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ est dite *transiente* si, pour toute partie bornée A de $\mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(S_n \in A) < +\infty$. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires telle que $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_1 = -1) = 1 - p$, avec $p \in \,]0, 1[$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que (S_n) est transiente si et seulement si $p \neq 1/2$.

131. Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que $\mathbf{P}(X_k = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_k = -1) = 1 - p$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, $T = \inf\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 1\}$ et $f_n = \mathbf{P}(T = n)$.

a) Montrer que $f_1 = p$ et que $\forall n \geqslant 2$, $f_n = (1-p)\displaystyle\sum_{k=2}^{n} f_{k-1}f_{n-k}$.

b) On pose $F : x \mapsto \mathbf{E}\left(x^T 1_{T<+\infty}\right)$. Montrer que $F(x) = px + (1-p)F(x)^2x$.

132. On considère un marcheur qui peut se situer sur n sites numérotés de 1 à n. À chaque étape, il a une probabilité $p_{i,j}$ de sauter du site numéro i au site numéro j.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note X_k la variable aléatoire donnant le site occupé par le marcheur à l'étape k et $\mu_{k,i} = \mathbf{P}$ (le marcheur est en i à l'étape k). L'application $\mu_k : i \in [\![1, n]\!] \mapsto \mu_{k,i}$ est la loi de X_k.

a) Donner les lois de X_1 et X_2 et fonction de μ_0 et des $p_{i,j}$.

b) Pour $f : [\![1, n]\!] \to \mathbb{R}$, donner $\mathbf{E}\left(f(X_1)\right)$.

On pose, pour $f \in \mathbb{R}^{[\![1,n]\!]}$, l'application $T(f) : [\![1, n]\!] \to \mathbb{R}$ définie par : $T(f)(i) = \mathbf{E}\left(f(X_1)\right)$ lorsque la suite (X_n) vérifie $\mu_0 = \mathbf{1}_{\{i\}}$.
On dit que la marche aléatoire est déterministe si : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \exists j_i \in [\![1, n]\!],\ p_{i,j_i} = 1$.

c) Interpréter cette dernière définition.

d) Montrer que la marche est déterministe si et seulement si : $\forall (f, g) \in \left(\mathbb{R}^{[\![1,n]\!]}\right)^2$, $T(fg) = T(f)\,T(g)$.

133. Soit $n \geqslant 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que X est à valeurs dans $\{V_1, \ldots, V_m\}$ avec, pour $k \in [\![1, m]\!]$, $\mathbf{P}(X = V_k) = p_k > 0$.

a) On dit que X est centrée lorsque $\mathbf{E}(X) = 0$. Montrer que, si X est centrée, alors $\mathrm{rg}(V_1, \dots, V_m) < m$.
b) On dit que X est centrée-réduite lorsque $\mathbf{E}(X) = 0$ et que la matrice de covariance $(\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est égale à I_n. Montrer que si X est centrée-réduite alors $m \geqslant n$.
c) On suppose que $m = n + 1$. Montrer que X est centrée-réduite si et seulement si, pour tous $i \neq j$, $\langle V_i, V_j \rangle = -1$ et, pour tout i, $p_i = \dfrac{1}{\|V_i\|^2 + 1}$.

Mines - Ponts – PC

Algèbre

134. Calculer $\min\limits_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum\limits_{i=1}^{n} \left\lfloor \dfrac{\sigma(i)}{i} \right\rfloor$

135. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A, B, C trois points du plans complexe d'affixes a, b et c. On suppose que le triangle ABC n'est pas aplati et que $a, b, c \in \mathbb{U}_n$.
a) Combien y a-t-il de tels triangles ?
b) Combien d'entre eux sont rectangles ?

136. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ et $\varphi(z) = |f(z)|^2$.
a) La fonction φ est-elle bornée sur $\mathbb{C}$?
b) Montrer que φ est bornée sur $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant 1\}$ et déterminer son maximum sur D.

137. On pose $f : z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mapsto \dfrac{1}{z - i}$.
a) Montrer que l'image de toute droite du plan complexe ne passant pas par i est un cercle privé de l'origine.
b) Peut-on généraliser à $f : z \in \mathbb{C} \setminus \{b\} \mapsto \dfrac{z - a}{z - b}$, avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $a \neq b$?

138. On dit que $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 0$ est un polynôme réciproque si $P = X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right)$.
Soit P un polynôme réciproque.
a) Soit z une racine complexe de P. Montrer que $z \neq 0$. Montrer que $1/z$ est une racine de P de même multiplicité que z.
b) On note α, β les multiplicités (éventuellement nulle) de 1 et -1 comme racines de P. Montrer qu'il existe q un $\mathbb{N}$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré q tels que :
$P = (X - 1)^\alpha (X + 1)^\beta X^q Q\left(X + \dfrac{1}{X}\right)$.
c) Factoriser $X^7 - \dfrac{5}{2}X^6 + \dfrac{3}{2}X^5 + \dfrac{3}{2}X^2 - \dfrac{5}{2}X + 1$.

139. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ distincts. Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^p)^q = P(X^q)^p$.

140. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n dont les racines sont distinctes, réelles, strictement supérieures à 1. On pose $Q = (X^2+1)PP' + X\left(P^2 + P'^2\right)$. Montrer que Q admet au moins $2n-1$ racines réelles distinctes.

141. Soit $\phi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P - P'$.
a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$ induit une bijection sur $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Pour $Q \in \mathbb{R}[X]$, montrer qu'il existe un unique $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = R - R'$.
c) Avec les notations précédentes, on suppose $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) \geqslant 0$.
En considérant $f : x \mapsto e^{-x}R(x)$, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $R(x) \geqslant 0$.
d) On suppose R scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Montrer que Q est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

142. Soient $L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés au n-uplet $(-1, -2, \ldots, -n)$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, soit $\alpha_{n,k} = \prod\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} (i-k)$.

Soient enfin $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)\cdots(x+n)}$ et $g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{n,k}(x+k)}$.
a) Donner l'écriture factorisée des polynômes L_i et les valeurs de $L_i(-j)$ pour $i, j \in [\![1, n]\!]$.
b) Montrer que $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donner la décomposition de $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans cette base.
c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} L_k$ et en déduire une expression simple reliant f_n et g_n.
d) Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour $n \geqslant 2$.
e) Trouver une relation simple entre $\dfrac{1}{\alpha_{n,k}}$ et $\dbinom{n-1}{k-1}$.
f) Donner une expression de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

143. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ et $k \in \mathbb{Z}$, on pose $c_k(P) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{it})\, e^{-ikt}\mathrm{d}t$.
a) Exprimer les $c_k(P)$ en fonction des coefficients de P.
b) Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}$.

144. Soit $n \geqslant 2$. On considère l'égalité $(*)$: $(1+iX)^{2n+1} - (1-iX)^{2n+1} = 2iX\, Q_n(X)$.
a) Montrer qu'il existe un unique $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(*)$ soit vérifiée. Déterminer le degré et le coefficient dominant de Q_n.
b) Déterminer les racines de Q_n.
c) Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(4 + \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$.

145. Soit $u \in \mathbb{R}$. On pose $P_0 = 1$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P_k = X(X-ku)^{k-1}$.
a) Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(X) = P(0) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(ku)}{k!} P_k(X)$.

146. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que P est minoré sur $\mathbb{R}$.
On pose $Q = P + P' + \cdots + P^{(n)}$. Montrer que Q est minoré sur $\mathbb{R}$.

147. Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

148. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = Q^2 + R^2$.

149. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in [-1, 1],\ P(x) \geqslant 0$.
a) On suppose que $\deg(P) \leqslant 2$. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ et $a \in [-1, 1]$ tels que $P = \alpha(X - a)^2 + \beta(1 - X^2)$.
b) On revient au cas général.
Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2(1 - X^2)$.

150. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\dim(F) = n - 1$ si et seulement s'il existe $\Phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle telle que $F = \mathrm{Ker}(\Phi)$.

151. Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que $p - q$ est un projecteur si et seulement si $q \circ p = p \circ q = q$.

152. Soient E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = 0$ et $u + v$ inversible.

153. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre $X^T + X = \mathrm{tr}(X)A$.

154. Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$. Montrer que A est semblable à $E_{1,n}$.

155. ***a)*** Existe-t-il $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB - BA = I_n$?
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle et de trace nulle. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^n$ tel que (u, Au) est libre.
c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice à diagonale nulle.

156. Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
a) « Décrire » AB.
b) Montrer que BA est inversible.
c) Étudier le noyau et l'image de A et B.
d) Déterminer BA.

157. Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$. Montrer que $\mathrm{rg}(ABC) + \mathrm{rg}(B) \geqslant \mathrm{rg}(AB) + \mathrm{rg}(BC)$.

158. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$.

Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & x_2 & 1 & 0 \\ x_1^2 & 2x_1 & x_2^2 & 2x_2 & 2 \\ x_1^3 & 3x_1^2 & x_2^3 & 3x_2^2 & 6x_2 \\ x_1^4 & 4x_1^3 & x_2^4 & 4x_2^3 & 12x_2^2 \end{vmatrix} = 0$ si et seulement si $x_1 = x_2$.

159. Soit $(a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{2n}$.

Calculer $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & & & \vdots \\ b_3 & b_3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & b_n & \cdots & b_n & a_n + b_n \end{vmatrix}$.

160. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

161. ***a)*** Pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, calculer $V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

b) Montrer : $\forall (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n \quad \prod_{k=1}^{n-1} k! \mid \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (m_j - m_i)$.

Ind. Considérer $D_n = \begin{vmatrix} 1 & m_1 & m_1(m_1 - 1) & \cdots & m_1 \cdots (m_1 - n + 1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & m_n & m_n(m_n - 1) & \cdots & m_n \cdots (m_n - n + 1) \end{vmatrix}$.

162. ***a)*** Soit $(U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $U + iV \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $U + x_0 V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
b) Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que M et N sont semblables sur $\mathbb{R}$.
c) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable à une unique matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, ou $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, ou encore $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2, b \neq 0$.

163. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $BAB = A$ et $ABA = B$.
Montrer que $A^2 = B^2$. Montrer que A et B ont le même noyau et la même image.

164. Soient $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\det(A) = \det(B) = \det(A+B) = \det(A-B) = 0$. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \det(xA + yB) = 0$.

165. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. On suppose que $\forall k \in [\![0, 2n]\!],\ \det(A+kB) = \pm 1$. Déterminer $\det(A)$ et $\det(B)$.

166. Soient A, B, C, D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$. On suppose que $M^T J M = J$. Montrer que A et D sont inversibles.

167. Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geqslant 2$. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ triangulaires supérieures telles que $M^p = I_2$.

168. Soit D l'endomorphisme de dérivation de $\mathbb{K}[X]$. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ stables par D.

169. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, ainsi que $u_1, \ldots, u_n$ des endomorphismes nilpotents de E commutant deux à deux. Simplifier $u_1 \circ \cdots \circ u_n$.

170. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que A et A^T sont semblables. Et si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

171. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\operatorname{id}$.
a) Montrer que n est pair.
b) Soit $x \in E$. Montrer que $\operatorname{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.
c) On suppose $n = 2p$. Montrer qu'il existe une famille $(e_1, \ldots, e_p)$ de E^p telle que $(e_1, u(e_1), \ldots, e_p, u(e_p))$ soit une base de E. Préciser la matrice de f dans cette base.

172. Soit $A \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$ et $\operatorname{rg} A = 2n$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$.

173. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ tels que (1) $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ et (2) $\forall (u, v) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2,\ u \circ v + v \circ u = 0$.
a) Montrer qu'il existe un projecteur $p_1 \in \mathcal{L}_1$ et un projecteur $p_2 \in \mathcal{L}_2$ tels que $p_1 + p_2 = \operatorname{id}$.
b) Montrer que $\operatorname{rg}(p_1) + \operatorname{rg}(p_2) = \dim E$.
c) Montrer, pour $i \in \{1, 2\}$, que si $w \in \mathcal{L}_i$, alors $\operatorname{Im} p_1$ et $\operatorname{Ker} p_1$ sont stables par w.
d) Montrer que $\mathcal{L}_1 = \{0\}$ ou $\mathcal{L}_2 = \{0\}$.

174. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. À quelle condition la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

175. Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$. Éléments propres de M ?

176. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $m_{n-i+1,i} = a_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, les autres coefficients étant nuls. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

177. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$. Soit $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A$.
a) Préciser $\mathrm{Im}\,\phi$ et $\mathrm{Ker}\,\phi$.
b) En déduire les éléments propres de ϕ.

178. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $j \in [\![0, 2n]\!]$, on pose $f_j : t \mapsto \mathrm{sh}^j(t)\,\mathrm{ch}^{2n-j}(t)$ définie sur $\mathbb{R}$.
a) On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par les f_j.
Montrer que $\mathcal{F} = (f_0, \ldots, f_{2n})$ est une base de F.
b) On note D l'opérateur de dérivation sur F. Montrer que D induit un endomorphisme. Donner ses éléments propres.

179. Soient $A \in \mathbb{C}[X]$ et $B = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$, où $n \geqslant 1$ et les λ_k sont des complexes distincts et non racines de A. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on pose $P_j = \displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n}(X - \lambda_k)$. Soient $N \geqslant n-1$ et ϕ l'application qui à $P \in \mathbb{C}_N[X]$ associe le reste de la division de AP par B.
a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_N[X]$.
b) Donner le noyau et l'image de Φ.
c) Donner une expression de $P_j(z)$ sans produit, pour $z \neq \lambda_j$.
d) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ? Préciser ses éléments propres.

180. ***a)*** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$. Donner le polynôme caractéristique de A.
b) En déduire une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité pour une matrice de rang 1.
c) L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
d) Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices diagonalisables de rang 1 ?

181. ***a)*** Déterminer le commutant $\mathcal{C}(M)$ de $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
b) Montrer que $\mathcal{C}(M) = \mathrm{Vect}(I_n, M, M^2)$.

182. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triangulaires supérieures.

183. Montrer que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent sont simultanément trigonalisables.

184. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. Que dire du spectre de $P(f)$?

185. Soient $A, B, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$ avec $\lambda \neq \mu$. On suppose que $I_n = A + B$, $M = \lambda A + \mu B$ et $M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$.
a) Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.
b) Montrer que M est diagonalisable et déterminer son spectre.

186. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

187. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. À quelle condition la matrice $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

188. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer que $B = \begin{pmatrix} I_n & A \\ A & I_n \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

189. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{i,i} = 0$ et $\forall j \neq i,\ a_{i,j} = j$.
a) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A et $(x_1\ \dots\ x_n)^T$ un vecteur propre associé, montrer que $(\lambda + 1)x_1 = (\lambda + 2)x_2 = \cdots = (\lambda + n)x_n$.
b) Montrer que $-1, -2, \dots, -n$ ne sont pas valeurs propres de A.
c) Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} = 1$.
d) En déduire que A est diagonalisable.

190. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = f + g$.
a) Montrer que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, g$ et $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g$.
b) On suppose f diagonalisable, montrer que $f \circ g$ est diagonalisable et que ses valeurs propres ne peuvent pas être dans $]0, 4[$.

191. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de spectre vide.
a) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2 tel que $\mathrm{Ker}(P(u)) \neq \{0\}$.
b) Montrer que l'on peut trouver un sous-espace stable par u de dimension 2.
c) En déduire que tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2.

192. Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geqslant 2$.
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_{n+p-1} + u_{n+p-2} + \cdots + u_n$.

On note $P = X^p - \sum_{i=0}^{p-1} X^i$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = (u_n\ u_{n+1}\ \cdots\ u_{n+p-1})^T$.
a) Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, ne dépendant pas de $(u_0, \ldots, u_{p-1})$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$. En déduire une expression de U_n en fonction A, U_0 et n.
b) Montrer que le polynôme caractéristique χ_A de A est P.
c) Montrer que P admet une unique racine α sur $\mathbb{R}^{+*}$ en considérant $T = (X-1)P$, puis que $\alpha \in \,]1, 2[$.

193. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA^2$ et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ |\lambda| \neq 1$. Montrer que A et B ont un vecteur propre en commun.

194. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à A.
a) Montrer que n est pair.
b) Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs avec pour blocs diagonaux $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
c) Montrer qu'il n'existe pas d'hyperplan stable par f.

195. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :
i) A est diagonalisable, ***ii)*** $\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(A)^n = 0 \Longrightarrow P(A) = 0$,
iii) le seul élément nilpotent de $\mathbb{C}[A]$ est 0.

196. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = C$, $AC - CA = 0$ et $BC - CB = 0$.
a) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
  i) Que dire de la famille $(M^k)_{0 \leqslant k \leqslant n^2}$?
  ii) Montrer qu'il existe une famille $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n^2}$ telle que $I_n + \sum_{k=1}^{n^2} \lambda_k M^k = 0$.
  iii) Montrer qu'on peut trouver un indice k tel que $\mathrm{Tr}(M^k) \neq 0$.
b) Montrer que C n'est pas inversible.
c) Montrer que A, B et C admettent un vecteur propre commun.
d) Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ et $P^{-1}CP$ soient triangulaires.
e) Montrer que C est nilpotente.

197. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^3$ et $\dim(E_1(A)) = 1$.
a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, A^2$ et $E_1(A)$ sont supplémentaires.
b) Montrer que $\mathrm{Ker}\, A^2$ et $E_1(A)$ sont stables par A.
c) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$.

198. On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices carrées diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) L'ensemble $\mathcal{D}_n$est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
b) Soit $V \subset \mathcal{D}_n$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\dim V \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.

c) Exhiber un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenu dans $\mathcal{D}_n$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

199. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose $\operatorname{tr}(A^k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. Montrer : $\forall\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$, $|\lambda| < 1$.

200. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que A est nilpotente si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{tr}(A^k) = 0$.

201. On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est d'ordre fini s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = I_n$. Dans ce cas, on appelle ordre de M le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = I_n$.
a) Montrer que les matrices d'ordre fini sont diagonalisables.
b) Soit M une matrice d'ordre p et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $M^k = I_n \iff k \in p\mathbb{Z}$.
c) Soient V_n l'ensemble des matrices d'ordre fini de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et $\mathcal{O}_n$ l'ensemble des ordres des éléments de V_n. Montrer que V_n est non vide et que $\mathcal{O}_n$ est fini.
d) Déterminer $\mathcal{O}_2$.

202. Soit E préhilbertien. Pour $(a,b) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $f_\alpha : x \mapsto x + \alpha\,\langle x, a\rangle\, b$.
a) A-t-on $f_\alpha \in \mathcal{L}(E)$?
b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f_α soit un isomorphisme, dans le cas où E est euclidien.
c) Pour $\beta \in \mathbb{R}$, calculer $f_\alpha \circ f_\beta$.
d) En supposant $f_\alpha \in \mathrm{GL}(E)$, préciser f_α^{-1}.
e) Qu'en est-il lorsque l'on suppose E simplement préhilbertien.

203. Soient E et F deux espaces euclidiens et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
a) Pour tout $y \in F$, montrer qu'il existe un unique $(x, y') \in (\operatorname{Ker} f)^\perp \times (\operatorname{Im} f)^\perp$ tel que $y = f(x) + y'$.
b) Avec les notations précédentes, on note $g : y \mapsto x$. Montrer que g est linéaire.
c) Préciser $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$.

204. Soit E un espace euclidien.
a) Montrer : $\forall f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R}), \exists! a \in \mathbf{E},\ \forall x \in E,\ f(x) = \langle a, x\rangle$.
b) On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 PQ$. Soit $f : P \mapsto P(0)$. Montrer qu'il existe $A \in E$ tel que : $\forall P \in E,\ f(P) = \displaystyle\int_0^1 AP$.
c) Montrer que $A(0) > 0$ et $\deg(A) = n$.
d) Montrer qu'il n'existe pas de $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = \displaystyle\int_0^1 AP$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.
e) Montrer qu'il n'existe pas de $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ |P(0)| \leqslant C\|P\|$.

205. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de $\mathbb{R}^n$. On note la propriété suivante (1) : $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow \langle u_i\,,\,u_j\rangle < 0$.
a) Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille vérifiant (1). Montrer qu'il existe une sous-famille libre de u ayant $p-1$ vecteurs.
b) Montrer qu'il n'existe pas de famille ayant au moins $n+2$ vecteurs vérifiant (1).

c) Donner une famille $(u_1, \dots, u_{n+1})$ vérifiant (1).

206. Soient E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E, p_F le projecteur orthogonal de E sur F et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F. On pose $G = (\langle f_i, f_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$.
a) Montrer que $G \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$.
b) Soient $y \in E$, $Y = \begin{pmatrix}\langle y, f_1\rangle\\ \vdots \\ \langle y, f_p\rangle\end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}$ la solution de $GX = Y$.
Montrer que $p_F(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i f_i$.

207. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. On pose $\forall (f,g) \in E^2,\ \langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 (f(t)\,g(t) + f'(t)\,g'(t))\mathrm{d}t$
a) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.
b) Soit $V = \left\{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}),\ f = f''\right\}$. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de dimension finie et déterminer une base de V.
c) Montrer que $V \oplus W = E$ et que $V^\perp = W$.

208. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $P^T MP$ soit de diagonale nulle.

209. ***a)*** L'ensemble $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
b) Déterminer Vect $(\mathcal{O}_2(\mathbb{R}))$.

210. Soit $M \in \mathcal{O}_n\,(\mathbb{R})$. Étudier la limite de la suite de matrices $A_k = \left(\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} M^i\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

211. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ semblable à son inverse.
a) Montrer que $\mathrm{tr}(A^2) \geqslant n$.
b) Montrer que $\mathrm{tr}(A^2) \geqslant n$ si et seulement si A est une matrice de symétrie orthogonale.

212. Soient $a \in \,]0,1[$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & a & 1-a\\ a & 1-a & 0\\ 1-a & 0 & a\end{pmatrix}$.
a) La matrice M est-elle diagonalisable ? Préciser ses valeurs propres.
b) Montrer que $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice L. Caractériser géométriquement L.
c) Soit $S \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer alors sa limite.
d) Soit $A \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R})$ telle que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Déterminer sa limite.

213. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}$, on pose $M(a, b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2\\ ab & a^2 & b^2 & ab\\ ab & b^2 & a^2 & ab\\ b^2 & ab & ab & a^2\end{pmatrix}$.
a) Montrer que $M(a, b)$ est diagonalisable.

b) Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de $M(a,b)$.
c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $M(a,b)^n \to 0$.

214. Soient $n \geqslant 3$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.
a) Montrer que M est diagonalisable.
b) Déterminer les valeurs propres de M et leur multiplicité.
c) Trouver un polynôme annulateur de M.

215. Soient $n \geqslant 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X_\ell = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) \\ \sin\left(\frac{2\ell\pi}{n+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{n\ell\pi}{n+1}\right) \end{pmatrix}$ pour $\ell \in [\![1,n]\!]$. On pose, pour $p,q \in [\![1,n]\!]$, $S_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{kp\pi}{n+1}\right)\sin\left(\frac{kq\pi}{n+1}\right)$.
a) Justifier que A est diagonalisable. Que peut-on dire de ses sous-espaces propres ?
b) Montrer que $(X_1,\dots,X_n)$ est une base de vecteurs propres de A.
c) Calculer $S_{p,q}$ pour $p,q \in [\![1,n]\!]$ avec $p \neq q$.

216. Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2 = 1$. On pose $A = I_n - 2UU^T$.
Montrer que A est orthogonale. Caractériser A.

217. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les matrices AA^T et A^TA sont semblables.

218. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ A^TA = AA^T \text{ et } (A^k)_{k\in\mathbb{Z}} \text{ est bornée}\right\}$.

219. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = MM^T$.

220. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^{*2}$ et $\Phi_{a,b} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R} \mapsto aM + bM^T$.
a) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres associés de $\Phi_{a,b}$.
b) Donner la trace et le polynôme caractéristique de $\Phi_{a,b}$.
c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\Phi_{a,b}$ soit inversible.
Préciser alors $\Phi_{a,b}^{-1}$.
d) L'endomorphisme $\Phi_{a,b}$ est-il autoadjoint pour le produit scalaire $(M,N) \mapsto \mathrm{tr}(M^TN)$?

221. On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} PQ$. Soit $\Phi : E \to E$ l'endomorphisme défini par : $\Phi(P) = (1 - X^2)P'' + 2XP'$.
a) Montrer que Φ est autoadjoint.
b) Montrer que Φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
c) Montrer qu'il existe une unique base orthonormée $(P_0, \dots, P_n)$ de E telle que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg P_k = k$ et $\langle P_k, X^k \rangle > 0$.
d) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $Q_k = (-1)^k P_k(-X)$. Montrer que $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base orthonormée de E, telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\deg(Q_k) = k$ et $\langle Q_k, X^k \rangle > 0$.
e) Conclusion ?
f) Montrer que, pour tout $C \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, C et P_n sont orthogonaux.
g) Montrer que P_n est scindé sur $]0, 1[$ à racines simples.

222. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $X \in F \backslash \{0\}$, $X^T AX > 0$. On note k la dimension de F. Montrer que A possède au moins k valeurs propres strictement positives.

Analyse

223. Pour $q \in]0, 1[$, on pose $N_q : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |P(k)|\, q^k$.
a) Montrer que N_q est une norme.
b) Existe-t-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ dont N_q soit la norme associée ?
c) Soit $(p, q) \in]0, 1[^2$ avec $p \neq q$. Les normes N_p et N_q sont-elles équivalentes ?

224. Soient $E = \mathbb{C}[X]$ et $b \in \mathbb{C}$. Si $P = \displaystyle\sum_{k \geqslant 0} a_k X^k$, on pose $\|P\| = \sup\{|a_k|,\ k \in \mathbb{N}\}$; c'est une norme sur E. Soit $f : P \in E \mapsto P(b)$.
a) Montrer que f est linéaire.
b) Étudier la continuité de f.

225. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ et $Q = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$ dans E, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n \text{ et } \varphi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$

a) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire et que φ est une forme linéaire sur E.
On munit E de la norme euclidienne associé à ce produit scalaire.
b) Soit ψ une forme linéaire continue de $(E, \|\ \|)$. Montrer que $\operatorname{Ker} \psi$ est un fermé de E.
c) Montrer que $H = \operatorname{Ker} \varphi$ est un fermé de $(E, \|\ \|)$.
d) Soit A une partie de E, montrer que $A^\perp$ est une partie fermée de E.

226. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $V = \left(\omega^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1 \leqslant k, \ell \leqslant n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$.

Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$, on pose $N_1(P) = \sup_{|z|=1} |P(z)|$ et $N_2(P) = \max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|$.

a) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$.

b) Calculer $V\overline{V}$. En déduire que V est inversible et calculer V^{-1}.

c) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$. Déduire de ***b)*** une expression des a_k en fonction des $P(\omega^\ell)$, $0 \leqslant \ell \leqslant n-1$.

d) Justifier l'existence de $N_1(P)$ et montrer que $N_2 \leqslant N_1$.

e) Trouver α et β dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $\alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$.

227. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

On munit E de la norme donnée par $\forall f \in E$, $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 \,\mathrm{d}t}$. Soit $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ tel que $K(s,t) = (1-s)t$ si $1 \geqslant t < s$ et $K(s,t) = (1-t)s$ sinon.

Si $f \in E$, on pose $T(f) : s \in [0,1] \mapsto \int_0^1 K(s,t)\, f(t)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E.

b) Montrer que, pour tout $f \in E$, $\|T(f)\|_2 \leqslant \dfrac{1}{3\sqrt{10}}\|f\|_2$.

Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}),\ f(0) = f(1) = 0\}$.

c) Montrer que l'image de T est incluse dans F.

d) A t-on égalité ?

228. On munit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme $\|\ \|$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\rho(A) = \max_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$.

a) L'application ρ est-elle une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $A^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\rho(A) < 1$.

c) i) Soit $\lambda \in C$ vérifiant $|\lambda| < 1$. Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer $\binom{p}{k}\lambda^{p-k} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On admet qu'il existe $(B,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $A = B + N$, avec N nilpotente, $BN = NB$ et B diagonalisable. On suppose que $\rho(A) < 1$. Montrer que $A^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

229. Déterminer la limite de la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$.

230. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto -1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k}$.

a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in\ ]0,1[$ admet une unique solution qu'on notera x_n.

b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ ainsi définie est décroissante et convergente.
c) Calculer sa limite.

231. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(3k-1)\right)^{1/n}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

232. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$.

233. Étudier la suite (z_n), où $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.

234. On définit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \pi + \arctan(\pi - x)$. On considère une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $u_0 \in]\pi/2, 3\pi/2[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Étudier les variations de f. Montrer que (π, π) est un centre de symétrie du graphe de f. Préciser les asymptotes.
b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $x > \arctan x$. En déduire, pour $x \in]\pi/2, 3\pi/2[$, le signe de $f \circ f(x) - x$.
c) Déterminer les solutions de $f \circ f(x) = x$.
d) Étudier la convergence de (u_{2n}).
e) Étudier la convergence de (u_n).

235. Soit $(\varepsilon_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $u_n = \sqrt{\varepsilon_0 + \sqrt{\varepsilon_1 + \sqrt{\cdots + \sqrt{\varepsilon_n}}}}$.
a) Étudier (u_n) dans le cas où (ε_n) est constante.
b) Montrer que (u_n) est croissante.
c) Montrer que (u_n) converge si et seulement s'il existe $a > 1$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon_n \leqslant a^{2^n}$.

236. Soit $(x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ telle que : $x_n \to 0$ et $\dfrac{\ln(x_n)}{x_1 + \cdots + x_n} \to a < 0$. Déterminer la limite de $\left(\dfrac{\ln(x_n)}{\ln n}\right)$.

237. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :$u_1 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{nu_n}$.
a) La suite (u_n) est-elle convergente ?
b) Donner un équivalent simple de u_n.

238. Soit, pour $n \geqslant 2$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$
a) Déterminer un équivalent de u_n.
b) Déterminer un équivalent de $u_n - \dfrac{\ln^2 n}{2}$.

239. Soit $a > 0$. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \arctan(u_n)$.
a) Montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
b) Donner un équivalent de u_n.
c) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

240. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \ln(u_n)$.
a) Déterminer la limite de (u_n).
b) Soit $a > 1$. Nature de $\sum \dfrac{1}{u_n^a}$?
c) Nature de $\sum \dfrac{\ln u_n}{u_n}$?
d) Nature de $\sum \dfrac{1}{u_n}$?

241. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ et calculer sa somme en cas de convergence.

242. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ tels que $a + b + c = \dfrac{\pi}{2}$. Montrer que $\sin(a)\sin(b)\sin(c) \leqslant \dfrac{1}{8}$.

243. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^{n-1})$ si et seulement si X^n divise P.

244. Soit $(A, B, \alpha) \in \mathbb{R}^3$. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} A(-x)^\alpha & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ Bx^\alpha & \text{si } x > 0. \end{cases}$

Discuter, en fonction de (A, B, α), du caractère dérivable de f, de son caractère $\mathcal{C}^1$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Discuter du caractère $\mathcal{C}^k$ de f.

245. Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times]-\pi, \pi]$ et $v_{a,b} : t \in]-2\pi, -\pi[\mapsto t + e^{a-(b-t)\cotan(t)} \sin t$.
a) Montrer qu'il existe $y \in]-2\pi, -\pi]$ tel que $v_{a,b}(y) = b$.
b) En déduire que le système $\begin{cases} x + e^x \cos y &= a \\ y - e^x \sin y &= b \end{cases}$ admet une solution.
c) Montrer que l'application $f : z \in \mathbb{C} \mapsto z\, e^z \in \mathbb{C}$ est surjective.

246. Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x)f(y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t$.

247. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y)f(x-y) = \left(f(x)f(y)\right)^2 \ (*)$.
a) Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
b) Montrer que, si $f(x_0) = 0$, alors $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
c) Montrer que, si f s'annule, alors est nulle.
d) Déterminer les fonctions qui vérifient $(*)$.

248. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et surjective.
a) Montrer que f a une infinité de zéros.
b) Montrer que tout réel a une infinité d'antécédents par f.

249. ***a)*** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et injective, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que f est strictement monotone.
b) Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ continue telle que : $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(f(x)) = x$. Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) = x$.

250. On admet le résultat suivant : si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et injective, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors f est strictement monotone.
On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle $f \circ f = \mathrm{id}$. On fixe un $f \in \mathcal{E} \setminus \{\mathrm{id}\}$.
a) Montrer que f est décroissante.
b) Montrer que f admet un unique point fixe, que l'on note d.
c) On note $g|_{[d,+\infty[}$. Montrer que g est strictement décroissante, que $g(d) = d$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
d) Réciproquement, montrer que, si on se donne $d \in \mathbb{R}$ et une fonction continue $g : [d, +\infty[\to \mathbb{R}$ strictement décroissante, telle que $g(d) = d$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, alors il existe $f \in \mathcal{E} \setminus \{\mathrm{id}\}$ tel que $f|_{[d,+\infty[} = g$.
e) Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour f soit de classe $\mathcal{C}^1$.

251. Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer les sous-espaces vectoriels de E vérifiant :
i) pour tout $f \in F$, on a $|f| \in F$, ***ii)*** pour tout $f \in F$, si $f \geqslant 0$, alors $\sqrt{f} \in F$.
Ind. Soit $f \in F$. Poser $g = |f|$. Que dire de $\left(g, g^{1/2}, \ldots, g^{1/2^n}\right)$?

252. Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que $f \circ g$ est décroissante. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont un unique point fixe.

253. Déterminer les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + 2\displaystyle\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t$.

254. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I(n) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos\left((n+2)x\right)\,\cos^n(x)\,\mathrm{d}x$.

255. On suppose $\pi = \dfrac{a}{b}$ avec $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \dfrac{X^n(a - bX)^n}{n!}\cdot$
a) Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, montrer que $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\pi)$ sont des entiers.
b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} P_n(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \in \mathbb{Z}$.
c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n > 0$.
d) Montrer qu'il existe un réel ξ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \leqslant \pi\dfrac{\xi^n}{n!}\cdot$ Conclure.

256. Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(0,1], \mathbb{R}^{+*})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 g(t)f(t)^n \mathrm{d}t$. Étudier la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. *Ind.* Commencer par étudier la limite de $\left(u_n^{1/n}\right)$.

257. Soit E l'ensemble des fonctions des $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π-périodiques.
a) Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que, pour toute $f \in E$,
$\sup\limits_{\mathbb{R}} |f| \leqslant A \displaystyle\int_0^{2\pi} |f'| + B \int_0^{2\pi} |f|$.
b) Est-ce toujours vrai pour des fonctions à valeurs complexes ?

258. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $t \mapsto e^{-(t-p\pi)^2} \sin(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que son intégrale est nulle.

259. Soient $a > 1$ et $b > 1$ deux réels. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{b - \cos t}{a - \cos t}\right) \mathrm{d}t$.
Ind. Remarquer que $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ est une primitive sur $]1, +\infty[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

260. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et bornée, ainsi que $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Convergence et calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(b+t) - f(a+t)\right) \mathrm{d}t$.

261. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} = \ell$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x$ est convergente. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(b+x) - f(x+a)\right) \mathrm{d}x$ convergente et la calculer.

262. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-at^2 - \frac{b}{t^2}\right) \mathrm{d}t$, pour $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$.

263. Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{t} - \left\lfloor \dfrac{1}{t} \right\rfloor$.
a) La fonction f est-elle intégrable sur $]0, 1[$?
b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t$.

264. Justifier l'existence et calculer :
$I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(|1 - x|) \cos(\ln x)}{x^\alpha (1 + x)} \mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(|1 - x|) \cos(\ln x)}{x^\alpha (1 + x)} \mathrm{d}x$.

265. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n+1}(t)}{t} \mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{t} \mathrm{d}t$.
a) Montrer que I_0 converge. On admet que $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R},\ \sin^{2n+1}(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{n-k} \frac{\sin((2k+1)t)}{2^{2n}}$.
c) Montrer l'existence de J_n et de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $q_n \in \mathbb{Q}$ tel que $I_n = q_n \pi$.

266. Soit $(C) : (y' + 2xy = 1,\ y(0) = 0.)$
a) On note ϕ la solution de (C). Justifier l'existence et l'unicité de ϕ.
b) Exprimer $\phi(x)$ à l'aide d'une intégrale que l'on de cherchera à calculer.
c) Pour $x > 0$, sachant que $t^2 \leqslant tx$ pour $t \in [0, x]$, donner le comportement de ϕ au voisinage de $+\infty$.
d) Montrer $e^{-x^2} \int_{x/2}^{x} \frac{e^{t^2}}{t^2} \, \mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.
e) Donner un équivalent simple de $\phi(x)$.

267. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, \pi/2]$, on pose $f_n(x) = \sin^n(x)\cos(x)$ et $g_n(x) = n f_n(x)$.
Étudier la convergence simple et uniforme des suites (g_n) et (f_n).

268. Soit (f_n) la suite définie par $f_0 : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto f_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (f_n(x))^2\right)$
a) Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
b) Est-ce que (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$?

269. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{\ln(n + x)}{n^2 + x^2}$.
Étudier la Convergence simple/uniforme/normale de $\sum f_n$.

270. Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x + n}}$.
a) Étudier la continuité, la dérivabilité et les limites en 0 et en $+\infty$ de S.
b) On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Montrer que, pour tout $x > 0$, $S(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}\,(1 + e^{-t})} \mathrm{d}t$.

271. Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + nx}$.
a) Montrer que S est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.
b) Déterminer la limite de S en $+\infty$ et donner un équivalent de $S(x)$ quand $x \to +\infty$.

272. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln n}{1 + n^2 x}$.
a) Donner le domaine de définition de f.

b) Étudier la continuité de f.
c) Déterminer la limite puis un équivalent de f en $+\infty$.
d) Déterminer la limite puis un équivalent de f en 0^+.

273. On considère $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, où $u_n(x) = \dfrac{1}{n + n^2x^2}$.
a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$, paire.
b) Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement.
c) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donner son intégrale sous la forme de la somme d'une série numérique.
d) Montrer que f est monotone sur $\mathbb{R}^{+*}$.
e) Donner la limite, puis un équivalent en $+\infty$.
f) Donner la limite, puis un équivalent en 0.

274. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. On pose $f_0 = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} : x \in [a,b] \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
On pose $g = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Justifier la définition de g et l'exprimer en fonction de f.

275. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}^+)^N$ décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n : x \in [0,1] \mapsto a_n x^n(1-x)$.
a) Montrer que $\sum u_n$ converge simplement.
b) Montrer que la convergence est normale si et seulement si $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.
c) Montrer que la convergence est uniforme si et seulement si $a_n \to 0$.

276. Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $M \in \mathbb{R}^+$.
On suppose que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x+y) - f(x) - f(y)| \leqslant M$.
a) Si $M = 0$, montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha x$.
b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $v_n(x) = \dfrac{f(2^n x)}{2^n}$. En considérant la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$, montrer que (v_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue g.
c) Montrer que g est la seule application linéaire telle que la fonction $f - g$ soit bornée sur $\mathbb{R}$.

277. *a)* Montrer : $\forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \dfrac{2}{\pi}|x| \leqslant |\sin x|$.
b) Donner le rayon de convergence de $\sum \dfrac{z^n}{\sin\left(n\pi\sqrt{3}\right)}$.

278. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} \dfrac{x^{kp}}{(kp)!}$?

279. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^{+*} > 0$ telle que $\sum a_n R^n$ soit absolument convergente.

a) Donner un exemple de telle série.

b) On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que f est continue sur $[-R, R]$.

c) Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, on pose $g(t) = \dfrac{1}{t} \ln \left| \dfrac{1-t}{1+t} \right|$.

i) Montrer que $\int_0^1 g$ converge.

ii) Exprimer g comme une somme de série entière sur $]-1, 1[$. En déduire $\int_0^1 g$.

iii) Calculer $\int_1^{+\infty} g$.

280. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n!}{1 \times 3 \cdots \times (2n+1)} x^{2n+1}$.

a) Déterminer le rayon de convergence R de f.

b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(E) : (x^2 - 2)y' + xy + 2 = 0$.

c) En déduire une expression de $f(x)$.

d) La série entière converge-t-elle pour $x = R$?

281. On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^{*2} \\ i+j=n}} \dfrac{1}{i^2 j^2}$.

a) Donner un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

b) Donner le rayon de convergence de $\sum u_n z^n$.

282. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Donner un équivalent de $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^\alpha}$ en 1^-.

283. Soit (T_n) la suite de polynômes définie par $T_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1}(X) = X(T_n(X) + T_n'(X))$.

a) Expliciter T_1, T_2, T_3 et T_4.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1}(X) = X \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k(X)$.

c) Soit $\phi : t \mapsto \exp(e^t)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi^{(n)}(t) = T_n(e^t)\phi(t)$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Développer $x \mapsto T_n(x)\, e^x$ en série entière.

284. Soit $D = \{z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| \leqslant 1\}$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On suppose que la série $\sum n a_n$ est absolument convergente.

a) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1.

b) Pour $z \in D$, on note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On suppose que $a_1 \neq 0$ et que $\sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n| \leqslant |a_1|$.
Montrer que f est injective.

285. On pose $f : (x, s) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^s}$.
a) Calculer $f(x, 0)$ et $f(x, 1)$ lorsque c'est possible.
b) Donner le rayon de convergence (à s fixé).
c) Donner le domaine de définition.
d) Donner une relation entre $f(x, s)$ et $f(x, s - 1)$.
e) Donner une expression simple de $f(x, -1)$ et $f(x, -2)$.
f) Donner un équivalent simple de $f(x, -p)$ au voisinage de 1^-, avec $p \in \mathbb{N}^*$.

286. Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} (na_n) = 0$.
a) Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est au moins 1.
b) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x \to 1^-}{=} \mathrm{o}\left(\ln(1 - x)\right)$.

287. On note $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$ et, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \int_1^{+\infty} e^{-x^n} \mathrm{d}x$.
a) Montrer que I est bien définie.
b) Montrer que (u_n) est bien définie.
c) Trouver un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$. Comment trouver le terme suivant du développement asymptotique ?
d) Donner le domaine de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

288. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose lorsque cela a un sens $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1 + t + \cdots + t^n} \mathrm{d}t$.
a) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geqslant 2}$ est bien définie et calculer sa limite.
b) Soit $n \geqslant 3$. Montrer que $I_{n-1} = \int_0^1 u^{n-3} \frac{1 - u}{1 - u^n} \mathrm{d}u$.
Montrer que $I_{n-1} = \frac{1}{n^2} \int_0^1 \frac{n(1 - s^{1/n})}{1 - s} s^{-2/n} \mathrm{d}s$.
c) En déduire un équivalent de I_n.

289. On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\gamma_n = n^{1/4}$ et $\phi_n : x \mapsto \frac{\gamma_n}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin\left(\sqrt{\frac{3}{n}} \gamma_n x\right)}{\sqrt{\frac{3}{n}} \gamma_n x} \right)^n$.

Soient également $A > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, nulle à l'extérieur de $[-A, A]$. Montrer que $\displaystyle\int_R f\phi_n \to f(0)$.

290. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\ln(1-t^n)\,\mathrm{d}d$.

a) Trouver la limite de (I_n).
b) Trouver un équivalent de I_n.
c) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de la série $\sum I_n^\alpha$.

291. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

a) Montrer que (I_n) admet une limite ℓ que l'on explicitera.
b) Déterminer un équivalent de $I_n - \ell$.
c) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$.
d) Déterminer un développement asymptotique de I_n à trois termes.

292. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{1-t^2}\mathrm{d}t$.

a) Montrer que I_n est bien définie.
b) Écrire I_n sous forme d'une somme.
c) Déterminer un équivalent de I_n.

293. Soient $a, b > 0$.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+nb)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1-e^{-bt}}\mathrm{d}t$.
b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\mathrm{d}t$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

294. Soit $x \in \,]0,1[$. Après avoir justifié l'existence des deux membres, montrer l'égalité $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$.

295. On pose $S : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+e^{-nt}\right)$.

a) La fonction S est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$? $]0, 1]$?
b) Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$.

296. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer la limite de (I_n).
b) Justifier l'existence de $L = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} \mathrm{d}u$.
c) Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{L}{n}$.
d) Montrer que $L = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

297. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$.
a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Montrer que F est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
c) Déterminer la limite de F en 0^+ et en $+\infty$.
d) Déterminer un équivalent de F en 0^+ et en $+\infty$. *Ind.* Calculer $F(x) + F(x+1)$.

298. On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et de classe $\mathcal{C}^1$.
b) On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \exp(-t^2) \,\mathrm{d}t$ et l'on donne $\lim\limits_{+\infty} F = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Exprimer simplement $f'(x)$.

299. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(t+1)}$.
a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.
b) Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
c) Montrer que la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de f.
d) Montrer que f est minorée par une valeur que l'on explicitera.
e) Déterminer un équivalent de f en 0.

300. Pour $x > 0$, on pose $s(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{xt} - 1} \,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que s est continue sur $]0, +\infty[$.
b) Écrire s comme la somme d'une série de fonctions rationnelles.
c) Montrer que $s(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x}$.

301. On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} \,\mathrm{d}t$.
a) Donner le domaine de définition et montrer que F est monotone.
b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.
c) Limite et équivalent de F en $+\infty$.
d) Limite et équivalent de F en 0.

302. On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3+x^3}$.
a) Domaine de définition ?
b) Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
c) Calculer $f(0)$.

303. On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+ixt)}$.
a) Montrer que f est définie, continue sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \mathbb{R}$.
c) Exprimer $f(x)$ sans signe intégral.

304. Soit $I : a \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que I est bien définie.
b) Calculer $I(1)$.
c) En déduire une expression de $I(a)$.

305. On pose $I : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x\cos t}\,\mathrm{d}t$. Donner un équivalent, puis un développement à deux termes de $I(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

306. Étudier $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

307. ***a)*** Pour quelles valeurs de t la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^t}$ converge-t-elle ? On note alors $\zeta(t)$ sa somme.
Pour $t > 0$, on pose $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$. On admet la convergence de cette intégrale.
b) Soit $t > 1$. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{t-1}}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$, et l'exprimer en fonction de $\zeta(t)$ et $\Gamma(t)$.
c) Justifier que $T(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{t-1}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$ est définie pour $t > 0$ et, pour $t > 1$, exprimer $T(t)$ à l'aide de $\zeta(t)$ et $\Gamma(t)$.

308. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt^2)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$. Déterminer le domaine de définition D de F et montrer que $\forall x \in D,\ F(x) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t$.

309. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

a) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$, puis de $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t$.
b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(i+t^2)}}{i+t^2}\mathrm{d}t$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que $\forall x > 0,\ f'(x) = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2}$.
d) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$.

310. On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que f et g sont continues sur $\mathbb{R}^+$.
b) Montrer que f et g sont de sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$, et solutions de $y'' + y = 1/t$.
c) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

311. Soit $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t^x)\mathrm{d}t$.
a) Montrer que f est bien définie.
b) Écrire f comme somme d'une série de fonctions.
c) Déterminer la limite de f en 0^+.

312. Soit $f : t \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{\mathrm{ch}(x)}\mathrm{d}x$.
a) Justifier que f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$.
b) Calculer $f(0)$.
c) Montrer que, pour $n \geqslant 2$, l'équation $f(t) = n$ possède une unique solution notée t_n.

313. On pose $J : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^x(t)}$.
a) Domaine de définition de J ?
b) Étudier la continuité de J.
c) Calcul de $J(1)$ et $J(2)$.
d) Déterminer une relation entre $J(x+2)$ et $J(x)$.
e) Expliciter $J(2p)$ et $J(2p+1)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.
f) A-t-on $J(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} J(x+1)$?
g) Donner un équivalent de J en $+\infty$.

314. Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + y = q$.
a) Donner les solutions de (E).
b) Soit f une solution de (E) telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(x) \geqslant 0$.
Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+\pi) + f(x) \geqslant 0$.
c) Soit f une solution de (E) pour laquelle il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a+\pi) + f(a) = 0$.
Montrer que f est de la forme $\lambda\cos + \mu\sin$, avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

315. Déterminer les $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

316. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$.
a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
b) A-t-on $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$?
c) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ si elles existent.

317. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
a) Pour tout $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ montrer : $f(b,d) - f(a,d) - f(b,c) + f(a,c) = \displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
où $g : x \mapsto \displaystyle\int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y$.
b) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :
$\forall (x,y) \in [-1,1]^2,\ |f(x,y) - f(0,y) - f(x,0) + f(0,0)| \leqslant M|xy|$.

318. Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'équivalence entre les assertions :
i) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}^+,\ f(tx,ty) = t^n f(x,y)$,
ii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = n\, f(x,y)$.

319. Étudier les extrema de $(x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

320. Soient $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \varphi(x)\, e^{-\|x\|^2}$. Montrer que f admet un minimum et un maximum, que l'on déterminera.

Probabilités

321. Soient Ω un ensemble de cardinal n et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de ses parties. On appelle mesure sur Ω toute application μ de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout couple (A,B) de parties disjointes de Ω, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. On dit que μ est une mesure de probabilité si de plus μ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et $\mu(\Omega) = 1$. Soit $x_0 \in \Omega$. On définit $\delta_{x_0} : \mathcal{P}(\Omega) \to \{0,1\}$ par $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \delta_{x_0}(A) = 1$ si $x_0 \in A$, et $\delta_{x_0}(A) = 0$ sinon. On admettra que δ_{x_0} est une mesure de probabilité.
a) Montrer que l'ensemble $M(\Omega)$ des mesures sur Ω est un espace vectoriel de dimension finie et calculer sa dimension.
b) Donner sans justifier une norme sur $M(\Omega)$.
c) On note $\Pr(\Omega)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur Ω. Est-il convexe ? borné ? ouvert ? fermé ?
d) Montrer que, pour toute mesure $\mu \in M(\Omega)$ il existe P_1 et P_2 probabilités et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\mu = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$.
Ind. On pourra introduire $A = \{\omega \in \Omega,\ \mu(\{\omega\}) > 0\}$ et $B = \{\omega \in \Omega,\ \mu(\{\omega\}) < 0\}$.

e) Montrer que $N(\mu) = \inf\{|\lambda_1|+|\lambda_2|\ ;\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \exists P_1, P_2 \in \mathrm{Pr}(\Omega),\ \mu = \lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2\}$ est une norme sur $M(\Omega)$.

322. On munit $\mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\})^2$ de la probabilité uniforme. Quelle est la probabilité pour que deux parties de $\{1, 2, \dots, n\}$ soient disjointes ?

323. On considère une particule se déplaçant sur un axe de $N + 1$ positions, indexées par $[\![0, N]\!]$. Lorsqu'elle est en position $k \in \{1, \dots, n - 1\}$, la particule peut se déplacer en position $k + 1$ avec probabilité $p \in]0, 1/2[$ ou bien en position $k - 1$ avec une probabilité $1 - p = q$. On arrête le processus lorsque la particule atteint l'abscisse 0 ou N.
On note u_a la probabilité que la particule termine son parcours en 0 en ayant commencé à l'abscisse $a \in [\![0, N]\!]$.
a) Que valent u_0 et u_N ?
b) Pour $0 < a < N$, trouver une relation entre u_a, u_{a-1} et u_{a+1}.
c) Quelle est la probabilité que le processus ne se termine pas ?

324. On dispose d'urnes numérotées $(U_n)_{n\geqslant 1}$. Dans l'urne U_n il y a une boule blanche et n boules noires. On commence par tirer une boule de l'urne U_1. Si elle est blanche, on s'arrête et si elle est noire on recommence l'expérience dans l'urne suivante. Ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne une boule blanche. On note X la variable aléatoire donnant le numéro de l'urne où l'on tire pour le première fois une boule blanche.
a) Déterminer la loi de X.
b) Soit $f : x \mapsto \lfloor \sqrt{x} \rfloor$. Montrer que $f(X)$ est d'espérance finie et calculer cette espérance.

325. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux jeux de hasard. Les deux jeux consistent à tirer à Pile ou Face un certain nombre de fois. Pour chaque lancer, on obtient Pile avec probabilité $p \in]0, 1[$.
– Premier jeu : on tire $2n - 1$ fois la pièce. On gagne lorsqu'on obtient au moins n fois Pile.
– Deuxième jeu : on tire $2n$ fois la pièce. On gagne lorsqu'on obtient au moins $n + 1$ fois Pile. Si on obtient n fois Pile, on a alors une chance sur deux de gagner.
On note X_1 le nombre de Piles au jeu 1 et X_2 le nombre de Piles au jeu 2.
a) Donner les lois de X_1 et de X_2.
b) Exprimer $\mathbf{P}(X_2 > n)$.
c) Soient p_1 la probabilité de gagner au jeu 1 et p_2 la probabilité de gagner au jeu 2. Exprimer $p_2 - p_1$ en fonction de $\mathbf{P}(X_1 = n)$ et $\mathbf{P}(X_2 = n)$.
d) À quel jeu vaut-il mieux jouer si l'on aime gagner ?

326. ***a)*** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Caractériser les $A \in \mathcal{A}$ tels que, pour tout $B \in \mathcal{A}$, A et B sont indépendants.
b) Soit Ω un ensemble fini. Existe-t-il une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ soient mutuellement indépendants ? Si oui, caractériser les probabilités qui vérifient cela.
c) Soient Ω un ensemble de cardinal $N \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{P}$ une probabilité sur Ω. Soit $(A_1, \dots, A_m)$ une famille d'événements mutuellement indépendants, non négligeables et non presque-sûrs. Montrer que $2^m \leqslant N$.

327. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans un ensemble fini telles que $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{E}(X^k) = \mathbf{E}(Y^k)$. Montrer que $X \sim Y$.

328. Soit X une variable aléatoire positive, qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbf{E}(X^k) = \displaystyle\int_0^{+\infty} kt^{k-1}\mathbf{P}(X > t)\,\mathrm{d}t$.

329. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = n)$ est la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
a) Montrer que X et $Y + 1 - X$ suivent la même loi.
b) On suppose $X \sim \mathcal{G}(p)$. Déterminer la loi de Y et en déduire les valeurs possibles pour p.

330. Soient $(p, p') \in \,]0, 1[^2$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{2n} \sim \mathcal{B}(p)$ et $X_{2n-1} \sim \mathcal{B}(p')$.
On pose $Y = \min\{n \in \mathbb{N}\,,\ X_n = 1\}$.
a) Montrer que Y est presque sûrement finie.
b) Loi, espérance et variance de Y.

331. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q et $U = \dfrac{X}{Y}$.
a) Calculer la loi de U.
b) Calculer l'espérance de U.

332. Soit $p \in \,]0, 1[$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. On pose $Y_n = X_n + X_{n+1} + X_{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k - 3p\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

333. Soient X une variable aléatoire réelle et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Soient $b > 0$ et I une partie de $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I,\ g(x) \geqslant b$.
a) Montrer que $\mathbf{P}(X \in I) \leqslant \dfrac{\mathbf{E}(g(X))}{b}$.
b) On suppose que $\mathbf{E}(X) = 0$ et que X admet une variance. Soit $t > 0$.
Montrer que $\mathbf{P}(X > t) \leqslant \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X) + t^2}$.

334. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in \,]0, 1[$. On note $q = 1 - p$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $T_n = \dfrac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$.
a) Loi et fonction génératrice de S_n.
b) Donner $\mathbf{E}(T_n)$ et $\mathbf{V}(T_n)$.
c) Soit $x > 0$. Exprimer $\mathbf{E}\left(x^{T_n}\right)$ et déterminer la limite de $\left(\mathbf{E}\left(x^{T_n}\right)\right)_{n\geqslant 1}$.

335. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, N\}$. On note μ l'espérance de U_1 et σ^2 la variance de U_1.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les variables $S_n = U_1 + \cdots + U_n$ et $V_n = \dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$.
Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathbf{E}(e^{tV_n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{t^2/2}$.

336. Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$.
a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n et de P_n.
b) Déterminer la loi de P_n.
c) Les variables S_n et P_n sont-elles indépendantes ?

337. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $\mathbf{P}(X_0 = 0) < 1$ et $\mathbf{E}(X_0) < +\infty$. On note R le rayon de convergence de $\sum X_n\, t^n$.
a) Rappelez la définition du rayon de convergence d'une série entière.
b) Montrer que : $(R > 1) = (X_n = 0$ à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N})$. En déduire que $(R > 1)$ est un événement et $\mathbf{P}(R > 1) = 0$.
c) Soit $0 \leqslant c < 1$. Montrer que $\mathbf{P}(R \leqslant c) = 0$.
d) Montrer que $\mathbf{P}(R = 1) = 1$.

338. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et d'espérance finie. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.
a) Montrer que la variable aléatoire $\mathbf{1}_{\{X_1\geqslant N+1\}}X_1$ est d'espérance finie.
Montrer que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{X_1\geqslant N+1\}}X_1\right) = 0$.
b) Pour $N \in \mathbb{N}$, montrer que $M_n \leqslant N + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_k\geqslant N+1\}}X_k$.
c) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(\frac{M_n}{n}\right)$. *Ind.* Revenir à la définition d'une limite.
d) Étendre ce résultat à une suite de variables aléatoires positives, de même loi et d'espérance finie.

339. ***a)*** Comparer $\mathbf{E}(X^2)$ et $\mathbf{E}(X)^2$ lorsque X est une variable aléatoire réelle discrète telle que $\mathbf{E}(X^2)$ soit finie.
b) Soient $N > 0$ et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables à valeurs dans $[0, N]$, ainsi que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
Montrer que $\mathbf{E}\left(f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\right) \to f\left(\mathbf{E}(X_1)\right)$.

340. Soient X, Y deux variables aléatoires et (X_n), (Y_n) deux suites de variables aléatoires, toutes à valeurs dans $\mathbb{N}$, les variables étant définies sur un même espace probabilisé.

On suppose : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\left(|X_n - X| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\mathbf{P}\left(|Y_n - Y| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

a) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$, montrer : $|x + y| \geqslant \varepsilon \Rightarrow |x| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ ou $|y| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

b) Montrer : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\left(|X_n + Y_n - (X + Y)| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow}$.

c) Soit (U_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi $\mathcal{B}(p)$, où $p \in [0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = U_{n+1} + U_n$. Montrer : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} V_i - 2p \geqslant \varepsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

d) Montrer $\mathbf{P}\left(|X| \geqslant M\right) \underset{M \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

e) Montrer : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}\left(|X_n Y_n - XY| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

341. Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. telle que X_1 soit d'espérance finie, mais pas X_1^2.

Pour $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on pose : $Y_{n,k} = X_k \mathbf{1}_{(|X_k| \leqslant n)}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_{n,k}$.

a) Montrer que : $\dfrac{1}{n}\,\mathbf{E}(S_n - T_n) \to 0$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(S_n \neq T_n) \leqslant n\,\mathbf{P}\left(|X_1| > n\right)$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$, montrer :

$\mathbf{P}\left(\dfrac{1}{n}\big|S_n - \mathbf{E}(T_n)\big| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\mathbf{V}(T_n)}{(n\varepsilon)^2} + n\,\mathbf{P}\left(|X_1| > n\right)$.

342. Soit $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$.

Déterminer le comportement asymptotique de $\left(\mathbf{E}\left(\mathrm{ch}(X_n)\right)\right)_{n \geqslant 1}$ et $\left(\mathbf{E}\left(\mathrm{sh}(X_n)\right)\right)_{n \geqslant 1}$

343. Soit $p \in \,]0, 1[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Soit N une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, indépendante de $(X_1, \ldots, X_n)$. On pose $Y = X_1 + \cdots + X_N$.

a) Montrer que Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

b) En utilisant les fonctions génératrices, trouver la loi de Y.

c) Retrouver ce résultat sans utiliser les fonctions génératrices.

344. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois géométriques de paramètres respectifs p et q. Quelle est la probabilité pour que $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

345. Soient $p \in \,]0, 1[$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{G}(p)$. On pose $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. On note S et B respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de M.

a) Exprimer S et B en fonction de X et Y. Justifier qu'elles sont des variables aléatoires.

b) Calculer $\mathbf{E}(S)$, $\mathbf{V}(S)$, $\mathbf{E}(B)$ et $\mathbf{V}(B)$.

346. Soit $(X_{i,j})_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $A_n=(X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $D_n=\det(A_n)$.
a) Calculer $\mathbf{E}(D_n)$.
b) Montrer, par récurrence, que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbf{V}(D_n)=n!$.

Centrale I – PC

Algèbre

347. ***a)*** Soient $A,B\in\mathbb{R}[X]$ et $P=A^2+B^2$.
i) Montrer que P est nul ou de degré pair, de coefficient dominant strictement positif.
ii) Les polynômes X^4-X^2+1 et X^4-1 peuvent-ils s'écrire A^2+B^2 avec $A,B\in\mathbb{R}[X]$?
iii) Que dire des racines de P et leurs multiplicités ?
b) Montrer que tout polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)\geqslant 0$ s'écrit A^2+B^2 avec $A,B\in\mathbb{R}[X]$.

348. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f\in\mathcal{L}(E)$. On dit que f admet un pseudo-inverse s'il existe $g\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f\circ g\circ f=f,\ g\circ f\circ g=g$ et $f\circ g=g\circ f$.
a) Que dire si f est inversible ? si f est l'endomorphisme nul ?
b) On suppose que f admet un pseudo-inverse. Montrer que $\mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Ker}(f)=E$.
c) On suppose que $\mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Ker}(f)=E$. Soit f_1 l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que f_1 admet un pseudo-inverse. En déduire que f admet un pseudo-inverse.
d) Montrer que f admet un pseudo-inverse si et seulement si $\mathrm{rg}(f)=\mathrm{rg}(f^2)$.

349. ***a)*** Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de Vandermonde soit inversible.
b) Soient $(Q_0,Q_1,\ldots,Q_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et $(z_0,\ldots,z_n)$ des nombres réels. Calculer le déterminant de la matrice $R=(Q_i(z_j))_{0\leqslant i,j\leqslant n}$.

350. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$.
Pour $\sigma\in\mathcal{S}_n$, on pose $P_\sigma=\big(\delta_{i,\sigma(j)}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
a) Soient σ et s dans $\mathcal{S}_n$. Montrer que $P_\sigma P_s=P_{\sigma\circ s}$ et montrer que P_σ est une matrice orthogonale.
b) Soit $\sigma\in\mathcal{S}_n$. Montrer qu'il existe $\ell\in\mathbb{N}^*$ tel que $P_\sigma^\ell=I_n$. Montrer que toutes les valeurs propres complexes de P_σ sont de module 1 et que 1 est valeur propre de P_σ.
c) À quelle condition P_σ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$?

351. Soient $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $E=\{P(M),\ P\in\mathbb{C}[X]\}$. On note p le nombre de valeurs propres distinctes de M.
a) Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie et que $p\leqslant\dim E\leqslant n$.
b) Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $\dim E=p$.

352. Soient $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f: M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mapsto AM-MA$.
a) Montrer que, si A nilpotente, alors f l'est également.
b) Montrer que, si $\big|\mathrm{Sp}(A)\big|=n$, alors $(I_n,A,\ldots,A^{n-1})$ est une base de $\mathrm{Ker}\,f$.

c) Montrer que si A est diagonalisable alors A^T l'est également. Donner une base de vecteurs propres de f dans ce cas.

353. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Soit $p \in [\![1, n]\!]$ le nombre de valeurs propres distinctes de A. Dénombrer les polynômes $P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ tels que A et $P(A)$ soient semblables.

354. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A^T = P(A)$.

355. ***a)*** Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tels que $u \neq 0$, $v \neq 0$ et $u \circ v = 0$. Montrer que $\operatorname{Ker} u \neq \{0\}$ et que $\operatorname{Ker} u$ est stable par v. En déduire que u et v possèdent un vecteur propre en commun.
b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B sont trigonalisables dans une même base.

356. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $\operatorname{Sp}(A) \cap \operatorname{Sp}(B) = \varnothing$.
a) Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.
b) Montrer que pour tout $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AM - MB = Y$.
c) On suppose que $\operatorname{Sp}(A) \cap \operatorname{Sp}(B) \neq \emptyset$. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ telle que $AM = MB$.

357. On pose $\phi : (A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2 \mapsto \operatorname{tr}(A^T B)$.
a) Montrer que ϕ est un produit scalaire.
b) On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} ; \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Déterminer $F^\perp$.
c) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $J_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer la distance de J_α à $F^\perp$.

358. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E et $G = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
a) Montrer que, si $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille libre, alors $\det(G) > 0$.
b) Dans le cas général, montrer que $\operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_p) = \operatorname{rg}(G)$.
c) Montrer que $\operatorname{Sp}(G) \subset \mathbb{R}^+$.

359. Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$.
a) Montrer que $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - x^2) f(x) g(x) \mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur E.
b) Soit E_p (resp. E_i) l'ensemble des éléments de E qui sont pairs (resp. impairs). Montrer que E_p et E_i sont orthogonaux et que $E_p \oplus E_i = E$.
c) Expliciter $E_p^\perp$ et $E_i^\perp$.

360. ***a)*** Montrer que tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 2$ admet une droite ou un plan stable.
b) Montrer que toute matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

361. Déterminer toutes les matrices A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^T A^2 = A$ et $\operatorname{Tr}(A) = n$.

362. Soient E un espace euclidien non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$.
a) Montrer qu'il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$.
b) Montrer que $u^* \circ u$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives.
c) Montrer que $x \mapsto \|u(x)\|$ est bornée sur la sphère unité.
Exprimer $\max\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ et $\min\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ en termes de valeurs propres de $u^* \circ u$.

363. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\chi_A = \prod\limits_{i=1}^{n} (X - [A]_{i,i})$.
a) Soit $A \in \mathcal{C}$. Calculer $\operatorname{tr}(A^T A)$.
b) Déterminer $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
c) Déterminer $\mathcal{C} \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

364. Soit $(A,B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $A^{2025} = B^{2025}$.
a) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = P(A^{2025})$. En déduire que A et B commutent.
b) Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $Q^T A Q$ et $Q^T B Q$ sont diagonales.
c) Montrer $A = B$.

Analyse

365. Pour $i \in \{1, 2, \infty\}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $|||A|||_i = \sup\{\|AX\|_i \ ; \ X \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|X\|_i = 1\}$ et, lorsque A est inversible, $\operatorname{Cond}_i(A) = |||A|||_i \, |||A^{-1}|||_i$.
a) Pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, montrer $|||AB|||_i \leqslant |||A|||_i \, |||B|||_i$.
b) Déterminer $\min\{\operatorname{Cond}_i(A) \ ; \ A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$.
c) Déterminer $\operatorname{Cond}_2(A)$ en fonction des valeurs propres de $A^T A$.

366. Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit la norme N sur E en posant $N(A) = \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} |a_{i,j}|$ lorsque $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$.
a) Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que : $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2, \ N(AB) \leqslant c\, N(A)\, N(B)$.
b) Montrer que la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{A^k}{k!}\right)_{n \geqslant 0}$ est convergente pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\exp(A)$ la limite de la suite.
c) Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ et $B_t = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A_t)$ et $\exp(B_t)$.

367. Une norme $\| \ \|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite sous-multiplicative si
$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ \|AB\| \leqslant \|A\| \times \|B\|$.
a) Donner un exemple de norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Soient $\| \ \|$ une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On définit la norme $\| \ \|_Q$ par $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ \|A\|_Q = \|Q^{-1} A Q\|$. Montrer que $\| \ \|_Q$ est sous-multiplicative.
c) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall m, n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+m} \leqslant u_n \times u_m$.
On définit $\ell = \inf\left\{u_n^{1/n}, \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Soit $\varepsilon > 0$.

i) Montrer qu'il existe m_ε tel que $u_{m_\varepsilon} \leqslant (\ell+\varepsilon)^{m_\varepsilon}$.
ii) Montrer qu'il existe $\alpha_\varepsilon > 0$ tel que $\forall n \geqslant m_\varepsilon,\ u_n^{1/n} \leqslant (\ell+\varepsilon)^{1-\frac{r_n}{n}}\alpha_\varepsilon^{1/n}$ où r_n est le reste de la division euclidienne de n par m_ε.
iii) En déduire que la suite $(u_n^{1/n})$ converge et préciser sa limite.

368. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(0)=1$, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)>0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)<0$. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1}=x_nf(x_n)$.
a) Étudier la suite (x_n).
b) Soit $(\alpha_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\alpha_n \to \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\alpha_k \to \ell$.
c) Nature de $\sum x_n$?

369. Soit E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^0([0,1[,\mathbb{R})$ s'annulant en 0. Pour $f \in E$, on pose $\phi(f)$ définie par : $\phi(f)(0)=0$ et $\forall x \in\ ]0,+\infty[,\ \phi(f)(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que ϕ est un endomorphisme.
b) L'application ϕ est-elle injective ? surjective ?
c) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de ϕ.

370. Soit $f \in \mathcal{C}^3([0,1],\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(f)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
a) Quelle est la limite de $(S_n(f))$?
b) Montrer qu'il existe $M>0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0,1,\dots,n-1\}, \forall t \in \left[\dfrac{k}{n},\dfrac{k+1}{n}\right]$,

$$\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)-\left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{(t-\frac{k}{n})^2}{2!}f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{6}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3.$$

c) En déduire que $S_n(f)=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

371. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x}\frac{\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Déterminer les limites de f en 0^+, en $+\infty$ et en $-\infty$, puis les variations de f.

372. Pour $n \in \mathbb{N}$, soient $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}(t)\mathrm{d}t$ et $J_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}t^2\cos^{2n}(t)\mathrm{d}t$ et $Q_n=\dfrac{J_n}{I_n}$.
a) Montrer :
$\forall n \in \mathbb{N},\ (2n+2)I_{n+1}=(2n+1)I_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n=-2n^2J_n+n(2n-1)J_{n-1}$.
b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Q_{n-1}-Q_n=\dfrac{1}{2n^2}$.
c) Montrer : $\forall t \in [0,\pi/2],\ t \leqslant \dfrac{\pi}{2}\sin(t)$.
d) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}(I_n-I_{n+1})$.

e) Prouver finalement : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

373. On pose $f : x \mapsto \displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 + e^{-n(x^2+1)}\right) = \lim_{N \to +\infty} \prod_{n=0}^{N} \left(1 + e^{-n(x^2+1)}\right)$.
a) Montrer que f est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
b) Étudier les variations de f.

374. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 - x^n}$.
a) Domaine de définition ? Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
b) Donner un équivalent de f en 1.
Ind. Considérer $g : t \mapsto f\left(e^{-t}\right)$ et en chercher un équivalent en 0.

375. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(nx^2 + 1)}$.
a) Déterminer le domaine de définition de f.
b) Étudier la continuité de f sur $]0, +\infty[$ et calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
c) La fonction f est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

376. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{x^2 + n^2}$.
a) Déterminer le domaine de définition de f et étudier la continuité de f.
b) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$, justifier l'existence de $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\, e^{-\alpha t} \mathrm{d}t$ et calculer cette intégrale.
c) La fonction f est-elle développable en série entière ?

377. Soit $\varphi : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$.
a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Donner un équivalent lorsque $x \to 0^+$ de $\varphi(x)$.

378. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto a_n x^n (1 - x)$.
a) Montrer la convergence simple de $\sum f_n$ sur $[0, 1]$.
b) Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$ si et seulement si la série numérique $\displaystyle\sum \frac{a_n}{n}$ converge.
c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

379. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne.
a) Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda \in]-1, 1[$. Montrer qu'il existe une unique fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - \lambda F(x + a) = f(x)$.
b) Expliciter F lorsque $f = \cos$.

380. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} S_n \frac{x^n}{n!}$.
a) Donner le rayon de convergence de $\sum S_n \dfrac{x^n}{n!}$.
b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = S_n - \ln n$. Montrer que $\sum(v_{n+1} - v_n)$ est convergente.
c) Donner une équation différentielle vérifiée par f.
d) Exprimer, pour $x > 0$, $f(x)$ à l'aide de $\displaystyle\int_0^x e^{-t} \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

381. ***a)*** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left((2k-1)t\right)$.
b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$.
c) Rayon de convergence de $\sum I_n x^n$?

382. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $a_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 t(t-1)\dots(t-n+1)\,\mathrm{d}t$.
Rayon de convergence et somme de $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

383. On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ est absolument monotone si, pour tout $x \in I$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) \geqslant 0$.
a) Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral.
b) Montrer que, si f et g sont absolument monotones, alors $f + g$ et fg sont absolument monotones.
c) Soient $R > 0$ et f une fonction absolument monotone sur $[0, R[$.
i) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $R_n(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Montrer que $x \mapsto \dfrac{R_n(x)}{x^n}$ est croissante sur $]0, R[$.
ii) Montrer que la série de Taylor de f converge simplement vers f sur $[0, R[$.

384. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln(n)\, x^n$.
a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
b) On pose $g : x \in]-1, 1[\mapsto (1 + x) f(x)$. Montrer que g est développable en série entière au voisinage de 0 et expliciter ses coefficients. Déterminer son rayon de convergence.
c) Montrer que la série définissant g converge uniformément sur $[0, 1]$.

385. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+\cdots+t^n}\mathrm{d}t$ lorsque cela a un sens.

a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$ est bien définie et calculer sa limite.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 u^{n-2}\frac{1-u}{1-u^{n+1}}\mathrm{d}u$.

c) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(nk+k-2)(nk+k-1)}$.

d) En déduire un équivalent de I_n.

386. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(t^2 - 2t\cos(x) + 1\right)}{t}\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie sur $]0, 2\pi[$.

Montrer que $\forall x \in\,]0, 2\pi[$, $f(2\pi - x) = f(x)$ et $f\left(\pi - \dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}f(x)$.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 2\pi[$. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in\,]0, \pi]$.

c) On donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$.

d) En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in\,]0, 2\pi[$.

387. Soit $f : x \in\,]0, 1[\, \mapsto \dfrac{x^2}{x-1}\ln(x)$.

a) Montrer que f se prolonge continûment sur $[0, 1]$ et que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et trouver un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(x^n)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

388. ***a)*** Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}\mathrm{d}u = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

b) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1[\,, \mathbb{R})$ croissante telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u$ converge. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to1^-}(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u$.

c) Donner un équivalent de $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1-x^n)$ lorsque $x \to 1^-$.

389. Pour $x \in\,]-1, +\infty[$, on pose $\theta(x) = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{s}{1+xs}\,\mathrm{d}s$

a) Étudier les variations de θ et calculer $\theta(x)$.

b) Pour $x > 0$, on pose $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

i) Justifier l'existence de $\Gamma(x)$.

ii) Donner un équivalent de $\Gamma(x+1)$ lorsque $x \to +\infty$. *Ind.* Poser $u = \dfrac{t-x}{\sqrt{x}}$.

390. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie, continue sur $[0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

b) Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t$.

391. On donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}e^{-t}}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$. Donner une expression simple de $f(x)$.

392. Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est bien définie et continue. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Déterminer $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^n}\right)$.

393. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) Déterminer une équation différentielle linéaire satisfaite par F sur $]0, +\infty[$. On admettra que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

394. ***a)*** Déterminer le domaine de définition de la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} \mathrm{d}t$.

b) Montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^n t} g(t)\, \mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ pour toute fonction g continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant $g(0) \neq 0$.

c) À l'aide du changement de variable $u = x^{1/n}t$, montrer que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{nx^{n-1}}\, g(0)$.

395. Soit $\lambda \in]-1, 1[$. On cherche les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $(E) :\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x) + f(\lambda x)$.

a) Déterminer les solutions de (E) qui sont développables en série entière.

b) Déterminer les solutions de (E).

396. ***a)*** Déterminer les valeurs de $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ pour lesquelles l'équation différentielle $xy'' + (x-4)y' - 3y = x^m$ admet au moins une solution polynomiale.

b) Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle $xy'' + (x-4)y' - 3y = 0$.

397. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$.
a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que, si $x \in \mathbb{R}$, $xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0$.
b) Trouver les solutions de l'équation différentielle $xy''+y'+xy = 0$ qui sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.
c) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
d) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout entier naturel n.

398. On donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne.
Soit $K : (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ et $U : (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*} \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} K(x-y,t)f(y)\mathrm{d}y$.
a) Montrer que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{\partial U}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t)$.
b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $U(x,t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} f(x)$.

399. Soit $n \geqslant 2$. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathbb{R}^n$ fixé.
Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, X \mapsto \langle X, AX - Y\rangle$.
a) On suppose que $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que Φ a un unique point critique et déterminer si Φ admet un extremum local en celui-ci.
b) On revient au cas général. Montrer que $\Phi(X) \underset{\|X\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Montrer que Φ admet un minimum et que celui-ci est atteint en un unique point.

400. ***a)*** Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$. On écrit $z = x+iy = re^{i\theta}$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \,]-\pi,\pi[$.
Montrer que $\theta = 2\arctan\left(\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. La formule $\theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ est-elle valable ?
b) On note $D = \mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\ , x \in \mathbb{R}^-\}$. Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur D telles que, pour tout $u \in D$, $\langle u, \nabla(f)(u)\rangle = \dfrac{1}{\|u\|}$ pour la structure euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

401. Soit $f : (x,y) \mapsto (x-y)^3 + 6xy$.
a) La fonction f admet elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$?
b) Montrer que f admet un minimum et un maximum sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Déterminer ces extrema.
c) Étudier les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

Géométrie

402. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les disques fermés de centres ω_1 et ω_2 et de rayons $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$.

On pose $f : (u_1, u_2) \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \mapsto |\det_\varepsilon(u_1, u_2)|$.
a) Montrer que f admet un maximum.
b) Soit (v_1, v_2) un point où f atteint son maximum. Pour $i \in \{1, 2\}$, montrer que v_i appartient au cercle de centre ω_i et de rayon r_i.

Probabilités

403. Pour $\lambda > 0$, soit Y_λ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.
a) Montrer qu'il existe $L_1, L_2 \in \mathbb{Z}[X]$ tels que, pour tout $\lambda > 0$, $\mathbf{E}(Y_\lambda) = L_1(\lambda)$ et $\mathbf{E}(Y_\lambda^2) = L_2(\lambda)$.
b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $L_p \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall \lambda > 0$, $\mathbf{E}(Y_\lambda^p) = L_p(\lambda)$.

404. On dispose de N pièces qui ont toutes pour probabilité $p \in \,]0, 1[$ de tomber sur Pile. Au premier tour, on lance toutes les pièces et on ne conserve que les pièces qui sont tombées sur Pile pour le tour suivant. On recommence ainsi l'expérience : on lance au tour n toutes les pièces tombées sur Pile au tour $n - 1$. On note X_n le nombre de Pile obtenus au n-ième tour. On note $U_n = (\mathbf{P}(X_n = 0) \ \cdots \ \mathbf{P}(X_n = N))^T$. Déterminer une matrice A telle que, pour tout n, $U_{n+1} = AU_n$. La matrice A est-elle diagonalisable ? Exprimer U_n en fonction de A et de U_0.

405. On effectue une infinité de lancers identiques et indépendants d'une pièce. La probabilité d'obtenir Pile est $p \in \,]0, 1[$. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de Face avant l'apparition du deuxième Pile.
a) Donner la loi de Y.
b) Montrer que Y est d'espérance finie, la calculer.
c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire donnant le nombre de Face avant l'apparition du k-ème Pile. Déterminer la loi de Y_k.

406. Soit $p \in \,]0, 1[$. On considère une pièce qui tombe sur Pile avec une probabilité p. On lance la pièce jusqu'à obtenir Pile pour la première fois. On note N le nombre de lancers. On lance ensuite N fois la pièce et on note X le nombre de Pile obtenus lors de cette deuxième série de lancers.
a) Déterminer la loi de N, la loi du couple (N, X), puis celle de X.
b) Soit $\lambda \in \,]0, 1[$. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes telles que $U \sim \mathcal{B}(\lambda)$ et $V \sim \mathcal{G}(\lambda)$. À quelle condition (portant sur λ) a-t-on $X \sim UV$?
c) Quelle est l'espérance de X ?

407. On lance deux pièces équilibrées n fois. On note A_n l'événement « on obtient autant de Pile que de Face après le n-ème lancer ». On note $p_n = \mathbf{P}(A_n)$.
a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
b) Déterminer p_n.
c) Déterminer le rayon de convergence et le domaine de définition de $\sum p_n x^n$.

408. Soit $p \in \mathbb{N}$. On dispose de $p+1$ urnes numérotées de 0 à p contenant des boules rouges et blanches. La proportion de boules rouges de l'urne numéro j est $\dfrac{j}{p}$. On choisit au hasard une urne, on effectue n tirages avec remise dans cette urne et l'on note X_n le nombre de boules rouges piochées.

a) Loi et espérance de X_n.

b) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $\lim\limits_{p \to +\infty} \mathbf{P}(X_n = k)$. Commenter.

409. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p)$. On pose $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$.

a) Donner $\mathbf{E}\left(\mathrm{rg}(M)\right)$.

b) Déterminer l'espérance et la variance de la plus grande valeur propre de M.