

Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On suppose que  $\mathbf{P}(X_0 = 0) < 1$  et  $\mathbf{E}(X_0) < +\infty$ . On note  $R$  le rayon de convergence de  $\sum X_n t^n$ .

a) Rappelez la définition du rayon de convergence d'une série entière.

b) Montrer que :  $(R > 1) = (X_n = 0 \text{ à partir d'un certain rang } N \in \mathbb{N})$ . En déduire que  $(R > 1)$  est un événement et  $\mathbf{P}(R > 1) = 0$ .

c) Soit  $0 \leq c < 1$ . Montrer que  $\mathbf{P}(R \leq c) = 0$ .

d) Montrer que  $\mathbf{P}(R = 1) = 1$ .

1. Rappelons que si  $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+^* \mid (X_n r^n)_n \text{ est bornée}\}$ , alors  $R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+^* \mid \left(\sum_{k=0}^n X_k r^k\right)_n \text{ converge}\right\}$  et encore

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+^* \mid X_n r^n \rightarrow 0\}.$$

2. Montrons que  $(R > 1) = (X_n = 0 \text{ à partir d'un certain rang})$ .

Si  $R > 1$ , alors  $X_n \rightarrow 0$ . Comme  $(X_n)$  est une suite à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , elle est donc nulle à partir d'un certain rang.

Réciproquement, si  $X_n = 0$  à partir d'un certain rang, alors pour tout  $r > 0$ ,  $X_n r^n \rightarrow 0$ , donc  $R = +\infty$  et en particulier  $R > 1$ .

Ainsi,  $(R > 1) = (X_n = 0 \text{ APCR})$ .

C'est bien un événement et  $\mathbb{P}(R > 1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} \{X_k = 0\}\right)$ .

Posons  $A_n = \bigcap_{k \geq n} \{X_k = 0\}$ . Comme  $A_{n+1} \supset A_n$ , le théorème de continuité croissante donne  $\mathbb{P}(R > 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$ .

Or, en notant  $B_p = \bigcap_{k=n}^p \{X_k = 0\}$ , on a  $A_n = \bigcap_{p \geq n} B_p$ .

Par continuité décroissante,  $\mathbb{P}(A_n) = \lim_{p \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_p)$ .

Par indépendance,  $\mathbb{P}(B_p) = \prod_{k=n}^p \mathbb{P}(X_k = 0)$ .

Si  $\mathbb{P}(X_k = 0) = q < 1$ , alors  $\mathbb{P}(B_p) = q^{p-n+1} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$ .

Donc  $\mathbb{P}(A_n) = 0$  pour tout  $n$ , d'où  $\mathbb{P}(R > 1) = 0$ .

3. Soit  $\varepsilon \in (0, 1)$ .

Montrons que  $\mathbb{P}(R \leq \varepsilon) = 0$ .

Si  $r \in (\varepsilon, 1)$  et si  $R \leq \varepsilon$ , alors la suite  $(X_k r^k)_k$  n'est pas bornée.

Autrement dit,  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, X_k r^k \geq 1$ .

Comme  $X_k \in \{0, 1\}$ , cela équivaut à  $X_k \geq \frac{1}{r^k}$ .

Ainsi  $\{R \leq \varepsilon\} \subset \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} \left\{X_k \geq \frac{1}{r^k}\right\}$ .

Posons  $B_n = \bigcup_{k \geq n} \left\{X_k \geq \frac{1}{r^k}\right\}$ .

Par continuité décroissante,  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 0} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n)$ .

Par l'inégalité de Markov,  $\mathbb{P}\left(X_k \geq \frac{1}{r^k}\right) \leq r^k \mathbb{E}(X_k)$ .

Si  $\mathbb{E}(X_k) = m$ , alors

$\mathbb{P}(B_n) \leq \sum_{k \geq n} \mathbb{P}\left(X_k \geq \frac{1}{r^k}\right) \leq m \sum_{k \geq n} r^k = m \frac{r^n}{1-r}$ .

Comme  $r < 1$ ,  $\mathbb{P}(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Par conséquent,  $\mathbb{P}(R \leq \varepsilon) = 0$ .

4. On en déduit que  $\mathbb{P}(R = 1) = 1$ .

En effet,  $\mathbb{P}(R > 1) = 0$  et  $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ ,  $\mathbb{P}(R \leq \varepsilon) = 0$ .

$$\text{Or } (R < 1) = \bigcup_{n \geq 1} \left( R \leq 1 - \frac{1}{n} \right).$$

$$\text{Par sous-additivité, } \mathbb{P}(R < 1) \leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{P} \left( R \leq 1 - \frac{1}{n} \right) = 0.$$

Ainsi  $\mathbb{P}(R < 1) = 0$ .

Finalement,  $\mathbb{P}(R = 1) = 1 - \mathbb{P}(R > 1) - \mathbb{P}(R < 1) = 1$ .