Condition $\begin{cases} a_n^2 + 4\sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 \neq 0 \\ \text{et } \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 \neq 0 \end{cases}$

ou $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

ou $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $a_i = 0$ et $a_n \in \mathbb{C}$

Evariste

$A \in S_n(\mathbb{R})$ $F \subset \mathbb{R}^n$ tq $\forall x \in F \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ $x^T A X > 0$

$k = \dim F$

Mq A a k valeurs propres $\in \mathbb{R}_+^*$

Soit $(f_1, \dots, f_k)$ BON de F

que l'on complète en base de $\mathbb{R}^n$ $(\underbrace{f_1, \dots, f_k}_{F}, \underbrace{e_{k+1}, \dots, e_n}_{F^\perp})$

Par th spectral on dispose d'une BON de vecteurs propres de A

Si $k = n$: oui

Si $k \neq n$: $\forall x \in F$, $x^T A X > 0$ en particulier $f_i^T A f_i > 0$

→ $\mathbb{R}^n = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r} \oplus E_{\lambda_{r+1}} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r \leq 0$

$\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_p > 0$

$G = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$

Pour $x \in G$, $x^T A X \leq 0$

On pose $g = \dim G$

Par l'absurde, $g \geq n - k + 1$

On a $F \cap G \neq \{0\}$

donc $\exists x \in F \cap G$, $x \in F$ tq $x^T A x \leq 0$

Absurde