$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left(R\leq 1-\frac{1}{n}\right)\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(R\leq 1-\frac{1}{n}\right)$$

Or $\mathbb{P}\left(R\leq 1-\frac{1}{n}\right)=0$ par 3.

d'où $\mathbb{P}(R<1)=0$

ex 217 (Romain)

- Mq AA^T & A^TA sont semblables

On remarque que : $(AA^T)^T = AA^T \in S_n(\mathbb{R})$

Donc $AA^T = PD_1P^T$

De même par $(A^TA)^T = A^TA$

On a $A^TA = QD_2Q^T$

Or $\chi_{A^TA} = \chi_{AA^T}$ donc les spectres sont identiques, d'où les diagonales identiques.

Puis par transitivité de la relation de similitude, A^TA et AA^T sont semblables

Et dans $M_n(\mathbb{C})$?

- Le résultat précédent ne s'applique plus (th. spectral valide que pour les matrices réelles)

En fait, le résultat est en faux :

C. exple : $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$ symétrique mais pas diago car $\chi_A = X^2$ et $A \neq \frac{I_2}{2}$

c. exple pour th. spectral

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ $A^TA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ne marche pas.

ex 269 (William encore)

$f_n : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \frac{\ln(n+x)}{n^2+x^2}$ CVS / CVU / CVN de $\sum f_n$

$f_n(x) = \frac{\ln n + \ln(1+\frac{x}{n})}{n^2+x^2}$

$\leq \frac{\ln n + x/n}{n^2+x^2} = \frac{\ln n}{n^2} + \frac{x}{n^3+nx^2}$

$g_n(x) = n \times h_n$

On a alors :

$h_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$

$h_n'(x) = \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$