Oraux Mines

Ulysse

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dim° finie
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $Sp(u) = \emptyset$

Mq $\exists P \in \mathbb{R}_2[X]$ tq $\ker(P(u)) \neq \{0\}$

ex de Matrice à spectre vide : $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

$P(u) = u^2 + au + b\,id$

Donc on veut $(u^2 + au + b\,id)x = 0 \quad x \neq 0$

$u^2 x = -aux - bx \quad \rightarrow (x, ux)$ plan stable par u

$$\chi_u(x) = \prod_{i=1}^{n/2} (x - \lambda_i)(x - \bar{\lambda_i})$$

$$= \prod_{i=1}^{n/2} (x^2 - 2\,\mathrm{Re}(\lambda_i)x + |\lambda_i|^2)$$

$\boxed{\chi_u(u) = 0} \quad \prod_{i=1}^{n/2} (u^2 + a_i u + b_i) = 0$

$$\det\left(\prod_{i=1}^{n/2} u^2 + a_i u + b_i\right) = 0$$

$\exists i \in [\![1, \frac{n}{2}]\!]$ tq $\det(u^2 + a_i u + b_i) = 0$

$\boxed{\exists x \in E \setminus \{0\} \text{ tq } (u^2 + a_i u + b_i)x = 0}$

Mq $\exists$ un sev de dim° 2 stable par u

$\exists P \in \mathbb{R}_2[X]$ tq $\ker(P(u)) \neq \{0\}$

$P(X) = aX^2 + bX + c$

Soit $x \in \ker(P(u)) \quad a u^2(x) + b u(x) + cx = 0$

donc $\boxed{a u^2(x) = -b u(x) - c x}$, $(x, u(x))$ libre

$a \neq 0$, $u^2(x) = -\frac{b}{a} u(x) - \frac{c}{a} x$

|| Mq $\forall u \in \mathcal{L}(E)$ / E-Rev) $\exists$ sev de dim° 1 ou 2 stable par u

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E $\mathbb{R}$-ev, alors

1^er cas $sp(u) \neq \emptyset$

$\exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \exists \lambda \in \mathbb{R}$, $u(x) = \lambda x$

alors Vect(x) est stable par u

2^e cas $sp(u) = \emptyset \rightarrow \exists$ plan stable

Eraniste

$(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$

$$N_n = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ a_1 & \cdots & & a_n \end{bmatrix}$$

Condition pour que N_n soit diagonalisable

$\rightarrow$ Si $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ oui par th spectral

$\rightarrow$ Sinon $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$ $\forall j \in [\![1, n]\!]$, on peut écrire $a_j = \alpha_j + i \beta_j$

$rg(N_n) \leq 2$,

X associé à $\lambda \neq 0$ alors $N_n X = \lambda X \in \underbrace{Im(N_n)}_{dim° 2}$

donc $\dim(Ker(N_n)) \geq n-2$

$\times$ Si $rg(N_n) = 2$ alors $Im(N_n) = Vect\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right)$

où $(a_1, \ldots, a_n) \neq 0_{\mathbb{C}^n}$