donc $\boxed{a\,u^2(x) = -b\,u(x) - c\,x}$, $(x, u(x))$ libre

$a \neq 0$, $u^2(x) = -\frac{b}{a} u(x) - \frac{c}{a} x$

Mq $\forall u \in \mathcal{L}(E)$ / E-$\mathbb{R}$ev) $\exists$ sev de dim° 1 ou 2 stable par u

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E $\mathbb{R}$-ev, alors

<u>1er cas</u> $Sp(u) \neq \emptyset$

$\exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $u(x) = \lambda x$

alors <u>$\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u</u>

<u>2e cas</u> $Sp(u) = \emptyset$ $\rightarrow$ $\exists$ plan stable

Evariste

$(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$

$$N_n = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ a_1 & \cdots & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Condition pour que N_n soit diagonalisable

$\rightarrow$ Si $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ oui par th spectral

$\rightarrow$ Sinon $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$ $\forall j \in [\![1, n]\!]$, on peut écrire $a_j = \alpha_j + i\beta_j$

$rg(N_n) \leq 2$,

X associé à $\lambda \neq 0$ alors $N_n X = \lambda X \in \underbrace{\mathrm{Im}(N_n)}_{\dim° 2}$

donc $\dim(\mathrm{Ker}(N_n)) \geq n-2$

$*$ Si <u>$rg(N_n)$</u> $= 2$ alors $\mathrm{Im}(N_n) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right)$

où $(a_1, \dots, a_n) \neq 0_{\mathbb{C}^n}$

Résolution de $N_n X = \lambda X$:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\begin{cases} a_1 x_n = \lambda x_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} x_n = \lambda x_{n-1} \\ a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a_1}{\lambda} x_n \\ \vdots \\ x_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{\lambda} x_n \\ \lambda x_n = \frac{a_1^2}{\lambda} x_n + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{\lambda} x_n \end{cases}$$

Donc $x_n \left(\lambda - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j^2}{\lambda} - a_n\right) = 0$

Soit $x_n = 0 \Rightarrow X = 0_{\mathbb{C}^n}$

Si $x_n \neq 0$ alors $\lambda = a_n + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j^2}{\lambda}$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda a_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 = 0$$

$$\boxed{\Delta = a_n^2 + 4 \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2}$$

Si $\Delta = 0$: Pas diagonalisable

Si $\Delta \neq 0$: 2 racines distinctes complexes
$\Rightarrow$ 2 vecteurs propres non colinéaires

Si λ_1 ou $\lambda_2 = 0$, alors $\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = 0$

alors $\dim \ker(N_n) = n - 2$

or $E_0(N_n) = n-1$ donc pas diagonalisable

* Si $rg(N_n) = 1$, $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $a_i = 0$ et $a_n \in \mathbb{C}$ N_n diagonale

Condition $\begin{cases} a_n^2 + 4\sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 \neq 0 \\ \text{et } \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 \neq 0 \end{cases}$

ou $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

ou $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $a_i = 0$ et $a_n \in \mathbb{C}$

Evariste

$A \in S_n(\mathbb{R})$ $F \subset \mathbb{R}^n$ tq $\forall x \in F \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ $x^T A X > 0$

$k = \dim F$

Mq A a k valeurs propres $\in \mathbb{R}^*_+$

Soit $(f_1, \dots, f_k)$ BON de F

que l'on complète en base de $\mathbb{R}^n$ $(\underbrace{f_1, \dots, f_k}_{F}, \underbrace{e_{k+1}, \dots, e_n}_{F^\perp})$

Par th spectral on dispose d'une BON de vecteurs propres de A

Si $k = n$: oui

Si $k \neq n$: $\forall x \in F$, $x^T A X > 0$ en particulier $f_i^T A f_i > 0$

$\rightarrow$ $\mathbb{R}^n = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r} \oplus E_{\lambda_{r+1}} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r \leq 0$

$\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_p > 0$

$G = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$

Pour $x \in G$, $x^T A X \leq 0$

On pose $g = \dim G$

Par l'absurde, $g \geq n - k + 1$

On a $F \cap G \neq \{0\}$

donc $\exists x \in F \cap G$, $x \in F$ tq $x^T A x \leq 0$

Absurde