Exo 1472 (en complément du magnifique show de William)

Soit y une solution de $y'' + (1+q(t))y = 0 \quad$ sur $\mathbb{R}^+$.

Comme $q(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, il existe $T \geq 0$ tel que
$|q(t)| \leq \frac{1}{2} \quad$ pour tout $t \geq T$, d'où $1 + q(t) \geq \frac{1}{2} \quad$ pour $t \geq T$.

On définit, pour $t \geq T$, $E(t) = y'(t)^2 + (1+q(t))y(t)^2$.

Alors $E'(t) = 2y'y'' + q'(t)y^2 + 2(1+q)yy'$.

En utilisant l'équation $y'' = -(1+q)y$, on obtient $E'(t) = q'(t)\, y(t)^2$.

Comme $1 + q(t) \geq \frac{1}{2}$, on a $E(t) \geq y'(t)^2 + \frac{1}{2}y(t)^2 \;\Rightarrow\; y(t)^2 \leq 2E(t)$.

Ainsi, $E'(t) \leq 2|q'(t)|\, E(t)$.
On intègre cette inégalité entre T et t :

$$E(t) - E(T) \leq \int_T^t 2|q'(u)|\, E(u) du.$$

Par l'inégalité de Gronwall,

$$E(t) \leq E(T) \exp\left(2 \int_T^t |q'(s)|\, ds \right).$$

Or $q' \in L^1(\mathbb{R}^+)$, donc $\sup_{t \geq T} E(t) < +\infty$. On en déduit que y est bornée sur $[T, +\infty)$.

Enfin, y est continue sur $[0, T]$, donc bornée sur cet intervalle.

$$\boxed{\text{Ainsi, toute solution est bornée sur } \mathbb{R}^+.}$$