Exercice 76 (William)

Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

a) $H_v = I_n - \dfrac{2vv^T}{\|v\|^2}$

$$H_v v = v - 2\frac{vv^T}{\|v\|^2} v$$
$$= v - \frac{2v}{\|v\|^2}(v^T v)$$
$$= v - 2v$$
$$= -v.$$

Pour $u \perp v$, $H_v u = u$ (car $v^T u = 0$).

H_v est la symétrie orthogonale par rapport à $\text{vect}(v)^\perp$ = c'est une réflexion.
↳ hyperplan.

---

b) $$H_{v-\|v\|e}(v) = \left(I_n - 2\frac{(v-\|v\|e)(v-\|v\|e)^T}{\|v-\|v\|e\|^2}\right)v$$

$$= v - 2\frac{(vv^T - \|v\|ve^T - \|v\|ev^T + \|v\|^2 ee^T)}{\|v-\|v\|e\|^2}v$$

car $e^T v = 0$, $\|e\| = 1$.

$$= v - \frac{2(v\|v\|^2 - \|v\|e^3)}{2\|v\|^2}$$

$$= v - (v - \|v\|e)$$

$$= \|v\|e.$$

c) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

$A = (X_1 \; \dots \; X_n)$ dans $\mathcal{B}_C = (e_1, \dots, e_n)$

$X_1 \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ car A inversible.

Donc $H_{\underbrace{X_1 - \|X_1\| e}_{v_1}}(X_1) = \|X_1\| e$; $e \in \mathrm{vect}(X_1)^{\perp}$ unitaire.

On pose $A_1 = H_1 A$; $H_1 = H_{v_1}$.

$$\begin{aligned} A_1 e &= H_1 (Ae) \\ &= H_1 X_1 \\ &= \|X_1\| e. \end{aligned}$$

Com :

v et $\|v\| e$ sont de même norme.

$v - \|v\| e \perp v + \|v\| e$.

car $\|a\| = \|b\| \Rightarrow \langle a - b, a + b \rangle = 0$.

$$v = \frac{(v - \|v\| e) + (v + \|v\| e)}{2}$$

D'où : $H_{v - \|v\| e}(v) = \frac{1}{2}(-v + \|v\| e + v + \|v\| e)$
$= \|v\| e$.

D'où : $A_1 e_1 = \|X_1\| e_1$, e_1 le premier vecteur de la base canonique.

$$A_1 = \begin{pmatrix} \|x_1\| & * & & \cdot \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \\ \vdots \\ \\ \end{matrix}} & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \cdot \end{pmatrix}$$

$x_2 \neq 0 \in \mathbb{R}_{n-1}$.

→ on répète les opérations sur les colonnes de A en enlevant le premier élément à chaque fois, pour ne pas perturber les colonnes précédemment construites.

$$v_2 = x_2 - \|x_2\| e_1 \text{ de } \mathbb{R}^{n-1}.$$

$$\tilde{H}_2 = H_{v_2}$$

$$H_2 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \tilde{H}_2 \end{array}\right)$$

$$A_2 = H_2 A_1.$$

$$\text{D'où } A_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \|x_2\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } A_2 = \begin{pmatrix} \|x_1\| & * & \times & \\ 0 & \|x_2\| & * & \\ \vdots & 0 & \boxed{} & \\ \vdots & \vdots & x_3 & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

Finalement : $H_n H_{n-1} \cdots H_1 A = R = \begin{pmatrix} \|x_1\| > 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & \|x_n\| > 0 \end{pmatrix}$

$$A = \underbrace{H_1^{-1} \cdots H_{n-1}^{-1} H_n^{-1}}_{Q \in O_n(\mathbb{R})} R$$