Exercice 75 (Raphaël)

a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\exp(M) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{M^\ell}{\ell!}$$

Montrons que l'exponentielle de matrice est bien définie.

On utilise la sous-multiplicativité de la norme 1 :

$$\|M_\infty\| \leq \|M\|_1 = \sum |m_{i,j}|$$

$$\|MN\|_1 \leq \|M\|_1 \, \|N\|_1 \text{ : sous-multiplicativité.}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{M^k}{k!}(i,j)\right| \leq \frac{\|M^k\|_\infty}{k!} \leq \frac{\|M^k\|_1}{k!} \leq \frac{\|M\|_1^{\,k}}{k!}$$

sous-multiplicativité de la norme 1

Or c'est le terme général d'une série CV.

D'où $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \ \sum \frac{M^k}{k!}(i,j) \quad CV}$

$x = \exp(P(x))$ $\quad \ln(x) = P(x)$

$x = 1 + h$, $h \to 0$

$1 + h \sim P(x)$.

b) On suppose $M = I_n + A$; A nilpotente.

On regarde pour des réels : $x = 1 + h$, $h \to 0$

$x = \exp(\ln(x))$

$= \exp\left(\sum_{i=1}^{h} \frac{h^i}{i} (-1)^{i+1} + o(h^i)\right)$.

$$\ln(x) = \ln(1+h) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i-1} \frac{h^i}{i}}_{Q(h)} + o(h^n)$$

$$1+h = \exp(Q(h))\exp(o(h))$$

Or $\exp(Q(h))$ est DSE par produit de Cauchy
Donc il admet un DL à l'ordre n :

$$\boxed{\exp(Q(h)) = R(h) + O(h^n).}$$

On a : $1+h = \exp(Q(h))\exp(O(h^n))$

$= \exp(Q(h))(1+O(h^n))$

D'où $1+h-\exp(Q(h)) = \underbrace{\exp Q(h)}_{O(1)} \times O(h^n)$

$= O(h^n)$

D'où $1+h-\underbrace{R(h)}_{\in \mathbb{R}[X]} = O(h^n)$.

$\Leftrightarrow X^n \mid 1+X-R(X)$

(car $P(X) = O(X^n) \Leftrightarrow \mathrm{val}\, P \geq n$.

$\Leftrightarrow 1+X-R(X) = X^n S(X)$.

$\Leftrightarrow \underbrace{I_n + A}_{M} - R(A) = 0$

On a : $Q(A) = A - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} \cdots + (-1)^n \frac{A^{n-1}}{n-1} = A\,T(A)$

D'où $Q(A)$ nilpotent.

$\exp(Q(A))$ est une somme finie, d'où $\boxed{\exp(Q(A)) = R(A)}$

$$I_n + A = R(A) = \exp(Q(A))$$

$$\Leftrightarrow \boxed{M = \exp(P(M))}, \text{ avec } P(M) = Q(M - I_n)$$