Exercice 25 (Lucas)

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $(\sum u_n)$ DV

a) $$\frac{u_n}{(u_1+\dots+u_n)^2} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^2} \le \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$$

D'où : $$\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{S_n^2} \le \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{S_0} - \frac{1}{S_N}$$

$$\le \frac{1}{S_0}.$$

Donc $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$ converge car elle est bornée et à termes positifs.

---

b) $$\frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{S_{n-1} + u_1}{S_{n-1}} = 1 + \frac{u_1}{S_{n-1}}$$

d'où $$\ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) = \ln\left(1 + \frac{u_1}{S_{n-1}}\right) \le \frac{u_1}{S_{n-1}}$$
$$= \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$$

D'où $$\underbrace{\ln(S_N)}_{\to +\infty} - \ln(S_0) \le \sum_{n=1}^{N} \frac{u_1}{S_{n-1}} \quad \text{(télescopage)}$$

D'où $\boxed{\sum \frac{u_n}{S_{n-1}} \text{ DV}}$.

Cas 1 : $\frac{u_n}{S_{n-1}} \not\longrightarrow 0$

Alors $\frac{u_n}{S_n} = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{u_n}{S_{n-1}}}}$ donc $\frac{u_n}{S_n} \not\longrightarrow 0$

Donc $\boxed{\sum \frac{u_n}{S_n} \text{ DV}}$ grossièrement.

Cas 2 : $\frac{u_n}{S_{n-1}} \longrightarrow 0$.

Alors $\frac{\frac{u_n}{S_{n-1}}}{\frac{u_n}{S_n}} = \frac{S_n}{S_{n-1}} = 1 + \frac{u_n}{S_{n-1}} \longrightarrow 1$

donc $\frac{u_n}{S_{n-1}} \sim \frac{u_n}{S_n}$.

Donc $\boxed{\sum \frac{u_n}{S_n} \text{ DV car à termes positifs}}$

---

c) Supposons $\sum x_n^2$ DV.

Posons $y_n = \frac{x_n}{x_0^2 + \cdots + x_n^2}$

Par le a), $\sum \frac{x_n^2}{(x_0^2+\cdots+x_n^2)^2}$ CV, ie $\sum y_n^2$ CV
et par le b), $\sum \frac{x_n^2}{x_0^2+\cdots+x_n^2}$ DV, ie $\sum x_n y_n$ DV

contradiction de l'hypothèse $\sum y_n^2$ CV $\Rightarrow \sum x_n y_n$ CV

donc $\boxed{\sum x_n^2 \text{ CV}}$