

10

Soient $A, B \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{cases} [A, B] = AB - BA = \overset{\text{on note}}{D} \\ [A, B]^T = B^T A^T - A^T B^T = BA - AB = -D \end{cases}$$

Donc $D = -D^T$ donc $D \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ $\Leftrightarrow D = \begin{pmatrix} 0 & -d \\ d & 0 \end{pmatrix}$
donc $D^2 = -d^2 I_2$

Soit $C \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

$$\boxed{[D^2, C] = 0} \quad \text{car } -d^2 I_2 \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$$