

③ Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geq p$. Calculer $\sum_{h=0}^n \binom{n}{h} (-1)^h h^p$

On pose $P(X) = X^p$

Alors $\phi^h(P)(X) = P(X+h) = (X+h)^p$
donc $\phi^h(P)(0) = h^p$

$$\sum_{h=0}^n \binom{n}{h} (-1)^h \phi^h(P)(0) = (-1)^n \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} (-1)^{n-h} \phi^h(P)(0)$$

On pose $S_{n,p} = (\phi - \text{Id})^n(P)(0)$

Cas 1 : si $n > p$: $(\phi - \text{Id})^n(P) = 0$
ie $S_{n,p} = 0$

Cas 2 : si $n = p$

$$\begin{aligned} \text{On a } P(X+1) - P(X) &= (X+1)^p - X^p \\ &= X^p + pX^{p-1} + q(X) - X^p \\ &= pX^{p-1} + q(X). \end{aligned}$$

Donc $S_{n,p} = p!$

Exo

supplémentaire

(Augustin)

Soit E un K -ev de dim° finie. F, G deux sev de E tq
 $F \oplus G = E$. On pose $(e_1, \dots, e_h)$ base de F
 $(g_1, \dots, g_p)$ base de G .

① Soit $a \in G$.

On mg $(e_1 + a_1, \dots, e_h + a_h, g_1, \dots, g_p)$ base de E .

On a par concaténation de bases $(e_1, \dots, e_h, g_1, \dots, g_p)$ base de E .

→ Soit $x \in E$.

On écrit $x = \sum_{i=1}^h \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^p \mu_i g_i$ et $a = \sum_{i=1}^p \gamma_i g_i$.

$$\text{Donc } x = \sum_{i=1}^h \lambda_i (e_i + a) = \sum_{i=1}^h \lambda_i a + \sum_{i=1}^p \mu_i g_i$$

$$= \sum_{i=1}^h \lambda_i (e_i + a) + \sum_{i=1}^p g_i (\mu_i + \gamma_i \times \underbrace{\sum_{j=1}^h \lambda_j}_{\in \mathcal{K}})$$

Donc $(e_1 + a, \dots, e_h + a, g_1, \dots, g_p)$ est base de E .

ie $F_a \oplus G = E$.

② Soit $a \neq b \in G$.

On suppose par l'absurde que $F_a = F_b$.

$$\text{Donc } e_1 + a \in F_b$$

$$e_1 + b \in F_b$$

$$\text{et } e_1 + b - (e_1 + a) = b - a \in F_b.$$

Or $a, b \in G$ donc $b - a \in G$.

$$\text{Or } F_b \cap G = \{0_E\} \text{ donc } b - a = 0_E$$

ie $b = a$: absurde

Donc $F_a \neq F_b$: ie G admet une infinité de supplémentaires.