$\boxed{\text{exo } 307}$ a ACCA à A. $a \in \mathcal{L}(E)$.

$rg(a) = rg(a^2)$. et $Im(a^2) \subset Im(a) \Rightarrow Im(a^2) = Im(a)$

$Ker(a) \oplus Im(a) = E$.

· $\dim(Ker(a)) + rg(a) = n$.

· soit $x \in ker(a) \cap Im(a)$.

$\exists y \in E,\ a(y) = x$ et $a^2(y) = 0$.

$\Rightarrow x$

$\boxed{\text{illisible.}}$

$\boxed{\text{exo } 301}$ $A \in M_n(\mathbb{R})$. $M + M^T = tr(M) A$.

$M \in A_n(\mathbb{R})$. $tr(M) = 0$ $M = -M^T$.

Si $tr(M) \neq 0$. $2\,tr(M) = tr(M)\,tr(A)$

$\Rightarrow tr(A) = 2$.

$$A = \frac{M + M^T}{tr(M)} \Rightarrow A^T = A.$$

· si $tr(A) \neq 2$ ou A pas symétrique

M antisymétrique $\to$ seule solution.

· si $tr(A) = 2$ et A symétrique

on pose $B = M - \frac{tr(M)}{2} A$

$$B^T = M^T - \frac{tr(M)}{2} A$$

$$= \frac{tr(M) A}{2} - M - \frac{tr(M)}{2} A$$

$$= -\left(M - \frac{tr(M)}{2} A\right) = -B$$

$$M = B + \frac{tr(M)}{2} A.$$

Réciproquement. si $M = \lambda A + \underset{\text{antisym.}}{B}$

$tr(M) = 2\lambda$. $M + M^T = 2\lambda A = tr(M) A$.