

exo 297 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$

(i) A monotone (A inv., A^{-1} positive)

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n, Ax \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et A^{-1} positive.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. on note $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(?) $A^{-1}Ax = 0$ si $Ax \geq 0$.

$A^{-1}(Ax)$ est positive donc x est positive

$\parallel Ax = y \geq 0 \Rightarrow x = A^{-1}y \geq 0$ car $A^{-1} \geq 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) soit $A \in M_n(\mathbb{R})$

Si $\forall x \in \mathbb{R}^n, (Ax \geq 0 \Rightarrow x \geq 0)$

soit $x \in A$. donc $Ax = 0 \Rightarrow x \geq 0$.

et $A(-x) = 0$ donc $-x \geq 0$.

Donc $x = 0 \Rightarrow A$ est inversible.

On a: pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, E_i \geq 0$.

$E_i = A(A^{-1}E_i) \geq 0 \Rightarrow A^{-1}E_i \geq 0$.

On: $A^{-1}E_i = \begin{pmatrix} a_{1i}^{-1} \\ \vdots \\ a_{ii}^{-1} \\ \vdots \\ a_{ni}^{-1} \end{pmatrix}$

donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{pmatrix} a_{1i}^{-1} \geq 0 \\ \vdots \\ a_{ii}^{-1} \geq 0 \\ \vdots \\ a_{ni}^{-1} \geq 0 \end{pmatrix}$

donc A^{-1} positive

(Nathanaël)

exo 269 $A \in M_3(\mathbb{R})$.

$A^2 = 0, A \neq 0$.

soit u l'ACCA à $A: u^2 = 0$

Donc: $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ ie $\text{rg}(u) \leq \dim(\text{Ker}(u))$

$\text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u)) = 3$.

Donc $\text{rg}(u) \in \{0, 1\}$. $\text{rg}(u) \neq 0$ donc $\text{rg}(u) = 1$.

Donc $\dim(\text{Ker}(u)) = 2$.

$\exists x \in \mathbb{R}^3$ tq $(x, u(x))$ libre car sinon, u est inv.