

exo 296  $a_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}_{1 \leq i, j \leq n}$   $A^{-1}$  ?

$f: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) \end{cases}$

$B = \{1, X, \dots, X^n\}$

$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f(X^k) = (X+1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i$

$\text{mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = A$

$\Rightarrow A \in GL_n(\mathbb{R})$

on pose:  $g: P(X) \mapsto P(X-1)$

$f \circ g = \text{id}_E \Rightarrow g = f^{-1}$

$A^{-1} = \text{mat}_B(g)$

on:  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, g(X^k) = (X-1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} X^i$

$A^{-1} = \left( \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \right)_{i,k} \rightarrow$  problème d'indices ?

exo 263  $u \in \mathcal{L}(E), u^2 = 0$

$\neg$   $\exists B$  base de  $E$  tq:  $A = \text{mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0_n \end{pmatrix}$

avec  $0_i$  de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$u^2 = 0$  donc  $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$

$E = \text{Ker}(u) \oplus S$   $(s_1, \dots, s_n)$  base de  $S$

$(u(s_1), \dots, u(s_n))$  base de  $\text{Im}(u)$

on:  $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$  donc (T.B.I) on complète

en une base de  $\text{Ker}(u)$ :

$(u(s_1), \dots, u(s_n), g_{n+1}, \dots, g_{n-1})$  base de  $\text{Ker}(u)$