

BABA

$$A, B \in M_2(\mathbb{R})$$

$$ABAB = 0$$

on particularise : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = 0 \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad BABA = B^2 \neq 0.$$

autre méthode. $\underbrace{BA \underbrace{BA}_{=0}}_{=0} = 0 \Rightarrow BABA = 0$

(car BA nilpotente et son indice est nécessairement ≤ 2)

ex 305 $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

$$\operatorname{rg}(AB - BA) = 1 \Rightarrow AB - BA = XY^T$$

$$(AB - BA)^2 = XY^TXY^T$$

$$\begin{aligned} &\hookrightarrow \operatorname{tr}(AB - BA) \\ &= \operatorname{tr}(AB - BA)XY^T \\ &= 0. \end{aligned}$$

279 soit $S, P \in M_n(\mathbb{R})$ tq $S^2 = I_n$ et $P^2 = P$ et $(S - P)(S + P) = 0$

$$\operatorname{rg}(P) = \operatorname{tr}(P)$$

$$\operatorname{tr}(S^2) = \operatorname{tr}(I_n) = n.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}((S - P)(S + P)) &= \operatorname{tr}(SP - PS - P^2 + S^2) \\ &= \operatorname{tr}(SL) - \operatorname{tr}(P^2) \end{aligned}$$

donc $\operatorname{tr}(P) = n = \operatorname{rg}(P)$ donc P est inv.

Ainsi : $P^2 P^{-1} = PP^{-1} = I_n$ ie $P = I_n$.