

donc: $A \circ A^{-1} = id_E = A^{-1} \circ A$ et $(v + id_E)(w + id_E) = id_E$
 $\Rightarrow v \circ w + v + w + id_E = id_E$
 $(*) \Rightarrow v \circ w + v + w = w \circ v + w + v$
 $\Rightarrow v \circ w = w \circ v$

exo 271 a) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$. $\Phi(AB) = \Phi(BA)$.

$\exists M \in M_n(\mathbb{R})$ tq: $\Phi: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $A \mapsto \text{tr}(MA)$

Donc, soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$: $\Phi(AB) = \text{tr}(MAB) = \Phi(BA) = \text{tr}(MBA)$
 or mg: $M = \lambda I_n$. $= \text{tr}(AMB)$

$\forall B, \text{tr}([AM - MA]B) = 0 \Rightarrow AM - MA = 0, \forall A$
 $\Rightarrow AM = MA, \forall A$

Donc $M = \lambda I_n$ OK.

b) $\forall P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\Phi(P^{-1}AP) = \Phi(A)$. Donc $\text{tr}(MP^{-1}P) = \text{tr}(MA)$

Donc $\text{tr}(PMP^{-1}A) = \text{tr}(MA) \forall A, \forall P$.

donc $\forall P, PMP^{-1} = M \Leftrightarrow PM = MP$ donc M commute avec $GL_n(\mathbb{R})$ OK.

a) autre méthode: $E_{ij} \times E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$.

$\Phi(AB) = \Phi(BA)$.

$\Phi(E_{ii} E_{ij}) = \Phi(E_{ij} E_{ii})$ avec $i \neq j$

$\Rightarrow \Phi(E_{ij}) = 0$ si $i \neq j$.

$\Phi(E_{ij} E_{ji}) = \Phi(E_{ji} E_{ij})$

$\Phi(E_{ii}) = \Phi(E_{jj}) = \lambda = \Phi(E_{jj}) = \dots = \Phi(E_{nn})$

$A = ((a_{ij})) = \sum_i \sum_j a_{ij} E_{ij}$

$\Phi(A) = \sum_{i,j} a_{ij} \Phi(E_{ij}) = \lambda \sum_{i=1}^n a_{i,i} = \lambda \text{tr}(A)$