

exo 297 Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$

(i)  $A$  monotone ( $A$  inv.,  $A^{-1}$  positive)

(ii)  $\forall x \in \mathbb{R}^n, Ax \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii)

Si  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  et  $A^{-1}$  positive.

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . on note  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(?)  $A^{-1}Ax = 0$  si  $Ax \geq 0$ .

$A^{-1}(Ax)$  est positive donc  $x$  est positive

$\parallel Ax = y \geq 0 \Rightarrow x = A^{-1}y \geq 0$  car  $A^{-1} \geq 0$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$

Si  $\forall x \in \mathbb{R}^n, (Ax \geq 0 \Rightarrow x \geq 0)$

soit  $x \in A$ . Donc  $Ax = 0 \Rightarrow x \geq 0$ .

et  $A(-x) = 0$  donc  $-x \geq 0$ .

Donc  $x = 0 \Rightarrow A$  est inversible.

On a: pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, E_i \geq 0$ .

$E_i = A(A^{-1}E_i) \geq 0 \Rightarrow A^{-1}E_i \geq 0$ .

On:  $A^{-1}E_i = \begin{pmatrix} a^{-1}_{1i} \\ \vdots \\ a^{-1}_{ii} \\ \vdots \\ a^{-1}_{ni} \end{pmatrix}$

donc  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{pmatrix} a^{-1}_{1i} \geq 0 \\ \vdots \\ a^{-1}_{ii} \geq 0 \\ \vdots \\ a^{-1}_{ni} \geq 0 \end{pmatrix}$

donc  $A^{-1}$  positive

(Nathanaël)

exo 269  $A \in M_3(\mathbb{R})$ .

$A^2 = 0, A \neq 0$ .

soit  $u$  l'ACCA à  $A: u^2 = 0$

Donc:  $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$  ie  $\text{rg}(u) \leq \dim(\text{Ker}(u))$

$\text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u)) = 3$ .

Donc  $\text{rg}(u) \in \{0, 1\}$ .  $\text{rg}(u) \neq 0$  donc  $\text{rg}(u) = 1$ .

Donc  $\dim(\text{Ker}(u)) = 2$ .

$\exists x \in \mathbb{R}^3$  tq  $(x, u(x))$  libre car sinon,  $u$  est inv.



homothétie.

Q: complète  $(u, u(n))$  en une base  $B = (u(n), y, z)$  base de  $E$ .

Q: prend 2  $x_q (u(n), z)$  base de  $\text{Ker}(u)$

soit  $d_1, d_2, d_3$   $x_q: d_1 x + d_2 u(n) + d_3 z = 0$   
 $d_1 u(n) + 0 + 0 = 0$

donc  $d_1 = 0$  donc  $d_2 = d_3 = 0$ .

alors:  $\text{mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M$  donc  $A \sim M$ .

exo 247)  $E$   $K$ -v. de dim.  $n$ .

$(u, v, w) \in \mathcal{L}(E)^3$  avec  $w \in \text{GL}(E)$ .

1) Mg  $u$  et  $w$  commutent  $\Rightarrow u$  et  $w^{-1}$  commutent.

$u, w$  commutent donc  $uw = wu$ .

soit  $a = u \circ w^{-1} \Rightarrow wa = w \circ u \circ w^{-1}$   
 $= (w \circ u) \circ w^{-1}$   
 $= u \circ w \circ w^{-1}$   
 $= u$ .

donc  $wa = u$  puis  $a = w^{-1} \circ u$ .

$\Rightarrow u \circ w^{-1} = w^{-1} \circ u$

2) hyp:  $u \circ v + u \circ v = 0$ . mg:  $u$  et  $v$  commutent.

$\Rightarrow u \circ (v + \text{id}_E) + v = 0$ .

$\Rightarrow u \circ (v + \text{id}_E) + v + \text{id}_E = \text{id}_E$

$\Rightarrow \underbrace{(u + \text{id}_E)}_A \circ \underbrace{(v + \text{id}_E)}_B = \text{id}_E$

mg  $A$  inversible.  $\text{Im} \cdot (A \circ B) \subset \text{Im}(A)$ .

or:  $\text{Im}(A \circ B) = E \Rightarrow E \subset \text{Im}(A)$ .

$A$  surjective  $\Rightarrow A$  bijective car  $A \in \mathcal{L}(E)$ .

donc  $A \circ B = \text{id}_E \Rightarrow B = A^{-1}$ .