

ex 265 $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

a) $A + iB \in GL_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ tq: } A + tB \in GL_n(\mathbb{R})$.

$P: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \det(A + tB) \end{cases}$ est un polynôme.

par hyp. $P(1) = \det(A + iB) \neq 0$ car $A + iB \in GL_n(\mathbb{C})$.
donc P n'est pas nul.

donc $\exists t \in \mathbb{R}, P(t) \neq 0 \Rightarrow \det(A + tB) \neq 0$
 $\Rightarrow \det(A + tB) \neq 0$
 $\Rightarrow A + tB \in GL_n(\mathbb{R})$

b) on suppose A, B semblables dans $M_n(\mathbb{C})$
 $\Rightarrow \dots M_n(\mathbb{R})$

hyp: $\exists P \in GL_n(\mathbb{C}), B = PAP^{-1} \Rightarrow PB = AP$.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} = \underbrace{Q + iR}_{\in M_n(\mathbb{R})} \quad \underbrace{\quad}_{\in M_n(\mathbb{R})}$$

$$\text{avec } P_{\text{re}} = Q + iR$$

$$\begin{aligned} PB = AP & \text{ ie } (Q + iR)B = A(Q + iR) \\ \Rightarrow QB + iRB &= AQ + iAR \\ \Rightarrow \begin{cases} QB = AQ \\ RB = AR \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (Q + tR)B = A(Q + tR) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

or: $Q + iR = P \in GL_n(\mathbb{C})$, d'après a) $\exists t \in \mathbb{R}, Q + tR \in GL_n(\mathbb{R})$
 $\Rightarrow B = (Q + tR)^{-1} A (Q + tR)$
 $\Rightarrow B$ et A semblables dans $M_n(\mathbb{R})$