

exo 295 soit  $A \in GL_n(K)$  et  $A^{-1} \in GL_n(K)$ .  
 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  et  $A^{-1} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ .

On a:  $AA^{-1} = I_n \Rightarrow \forall (i, j) \in [1, n]^2, \delta_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ .

Donc:  $\forall i \in [1, n], 1 = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$

Donc:  $\exists i_0 \in [1, n], 1 = a_{i_0, i_0} b_{i_0, i_0}$  et  $\forall j \in [1, n] \setminus \{i_0\},$   
 $\hookrightarrow$  dépend de  $i$   $a_{i, i_0} b_{i_0, i} = 0$ .

et  $\forall (i, j) \in [1, n]^2, i \neq j,$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = 0 \Rightarrow \forall k \in [1, n], a_{ik} b_{kj} = 0$$

$$\Rightarrow \forall k \in [1, n], a_{ik} = 0 \text{ ou } b_{kj} = 0.$$

Soit  $(i, j) \in [1, n]^2$  tq  $i \neq j$ .

$\exists i_0 \in [1, n], 1 = a_{i_0, i_0} b_{i_0, i_0} \Rightarrow a_{i_0, i_0} = b_{i_0, i_0} = 1$ .

$a_{i, i_0} = 0$  ou  $b_{i_0, j} = 0 = a_{j, i_0}$  ou  $a_{i, i_0} = 1$ .

donc:  $a_{j, i_0} = 0$  et ceci pour tout  $j \in [1, n] \setminus \{i_0\}$ .

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$  donc  $A$  est formée des colonnes

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

exo 257

N

1) supposons:  $\forall k \in \mathbb{N}^*, f^k \neq id_E$

$x \neq f^k(x) \Rightarrow f(x) \neq f^2(x), \forall x \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ .

$f^p(x) \neq f^q(x) \forall p, q \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$\mathcal{K}_x = \{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}$ . Éléments distincts 2 à 2.

$\mathcal{K}_x$  est de cardinal infini  $\rightarrow$  on prend la contraposée.

2)  $f^{k+p} - f^p = 0$  pour  $p = 2ak, a \in \mathbb{N}$ .



**BABA**

$$A, B \in M_2(\mathbb{R})$$

$$ABAB = 0$$

on particularise :  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = 0 \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad BABA = B^2 \neq 0.$$

autre méthode.  $\underbrace{BA \underbrace{BA}_{=0}}_{=0} = 0 \Rightarrow BABA = 0$

(car  $BA$  nilpotente et son indice est nécessairement  $\leq 2$ )

**ex 305**  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

$$\operatorname{rg}(AB - BA) = 1 \Rightarrow AB - BA = XY^T$$

$$(AB - BA)^2 = XY^TXY^T$$

$$\begin{aligned} &\hookrightarrow \operatorname{tr}(AB - BA) \\ &= \operatorname{tr}(AB - BA)XY^T \\ &= 0. \end{aligned}$$

**279** soit  $S, P \in M_n(\mathbb{R})$  tq  $S^2 = I_n$  et  $P^2 = P$  et  $(S - P)(S + P) = 0$

$$\operatorname{rg}(P) = \operatorname{tr}(P)$$

$$\operatorname{tr}(S^2) = \operatorname{tr}(I_n) = n.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}((S - P)(S + P)) &= \operatorname{tr}(SP - PS - P^2 + S^2) \\ &= \operatorname{tr}(SL) - \operatorname{tr}(P^2) \end{aligned}$$

donc  $\operatorname{tr}(P) = n = \operatorname{rg}(P)$  donc  $P$  est inv.

Ainsi :  $P^2 P^{-1} = PP^{-1} = I_n$  ie  $P = I_n$ .