

30/09

Ex 25c)

* Soit $I_0 = I_n$ des intervalles disjoints de $\mathbb{R}$

$$\text{Soit } \varphi: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ P \mapsto \left(\int_{I_k} P(x) dx \right)_{k \in \{0, \dots, n\}} \end{cases}$$

Théorème du rang: $\dim \ker \varphi + \text{rg } \varphi = n+1$
 donc $\dim \ker \varphi = n+1 - \text{rg } \varphi \geq 1$
 car $\text{rg } \varphi \leq n+1$

Donc $\exists P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}$ tq $\forall k \in \{0, \dots, n\}, \int_{I_k} P(x) dx = 0$

* Pour que $\int_{I_k} P = 0$, il faut une racine sur I_k
 donc P admet au moins $n+1$ racines

or $P \in \mathbb{R}_n[X]$ admet au plus n racines

Ainsi: $P = 0$

$\rightarrow \forall P \in \mathbb{R}_n[X]$ satisfaisant ces conditions

Ex 25

Soit $f \in \mathcal{GL}(E)$, $p = \dim E$

$\forall x \in E, K_x := \{f^i(x), i \in \mathbb{N}\}$ fini

Soit $(e_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$ une base de E

Si $i \neq j$, $f(e_i) \neq f(e_j)$: évident !!

Ainsi $\exists i \neq j$ tq $f^i(e_i) = f^j(e_j) = 0$
 or $f \in \mathcal{GL}(E)$ (donc f^i, f^j aussi)

Par injectivité: $e_i = f^{j-i}(e_i)$

on pose $n_i = j-i$
 $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall n_i \in \mathbb{N}, f^{n_i}(e_i) = e_i$