

$$(Ex 208): \varphi(\delta) = (\text{Id} \dots \delta^n)$$

$$\text{or } \varphi(t) = \varphi(T)$$

$$UOT = TOU \rightarrow UO\delta = \delta OU$$

car U commute avec Id

$$\text{donc } \varphi(T) = \text{vect}(\text{Id}, S_1, \dots, S_n) \\ = \boxed{\text{vect}(\text{Id}_E, T_1, \dots, T^n)}$$

Ex 234

a) Soit $(u_n), (v_n) \in E_n, \lambda \in \mathbb{F}$

$$+ (\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \lambda (u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ + 0 \in E_p$$

Donc E_p est un $\mathbb{F}E$

$$(V_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}} : V_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$(V_n^{(k)}) \in E_p$$

Soit $\lambda_1 \rightarrow \lambda_p \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$

$$A_n = (\lambda_1 V_n^{(1)} + \dots + \lambda_p V_n^{(p)}) = 0$$

$$A_0 = 1_{\mathbb{F}} = 0$$

$$A_1 = \lambda_1 = 0 \dots \lambda_p = 0 \dots \lambda_p = 0 : \text{t. for}$$

Soit $(u_n) \in E_p$: $\begin{cases} \lambda_0 = \forall k \\ A_{p-1} = \forall p-1 \end{cases} \rightarrow (\lambda_0 V_0 + \dots + \lambda_p V_p) = u_n$

Donc $(v_0 \dots v_{p-1}) \in \mathbb{F}^p \subseteq E_p$

b) $(u_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}} = (e^{\frac{2i\pi k n}{p}})_n$

Soit $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$

$$+ u_{np}^{(k)} = (e^{\frac{2i\pi k n}{p}})^{np} = (e^{\frac{2i\pi k n}{p}})^p \times e^{\frac{2i\pi k n}{p}} = u_n^{(k)} \\ \rightarrow \text{dimension } p$$

TD 17 4

Liberté Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$
 $\sum \lambda_i (u_n^{(i)})_n$

$$n=0 \quad \lambda_0 + \dots + \lambda_n$$

$$\lambda_0 + \dots + \lambda_n \neq 0 \rightarrow \text{Valeur non nulle}$$

$$n=n-1 \quad \vdots \quad 0$$

[Ex 252]

Analyse

$$U^2 = U^2$$

→ U^2 est un projecteur

Pour U bijectif : $U \in GL(E)$: $U^2 = U^2$

donc $\dim \ker U \geq 1$

donc $U^2 \in GL(E)$ adjectif

or $\ker U \subset \ker U^2 \rightarrow \dim \ker U^2 \geq 1$

$$E = \ker U^2 \oplus \text{Im } U^2$$

Soit $x \in \text{Im } U^2$, $\exists x_0 \in E$, $x = U^2(x_0)$

$$U(x) = U^3(x_0) = U^2(x_0) = x$$

Soit $\text{Im } U^2$: $U = \text{Id}$

Pour $x \in \ker U^2$: $U^2(x) = 0$

→ $U|_{\ker U^2}$: nilpotence d'ordre 2

Synthese

$$U|_E : E \rightarrow E$$

$$x \mapsto U(x) \text{ Im } U^2$$

OK !

[Ex 212]

$$f, g \in \mathcal{L}(E)$$

$$\text{on a } U = r_3(f) \leq \min(\text{deg } f, \text{deg } g)$$

$$r_3(f, g) = \dim/m \text{ facteur } \text{Im } f \cap \text{Im } g = f(\text{Im } g)$$