

$$\dim(\ker(p)) = m \\ \forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall z \in M_i, \int^{mk} (e_i) = e_i$$

Pour $k=1$

$$\forall i \in M_1, f^m(e_i) = e_i$$

Ainsi f^m est id_E coïncident sur une base

$$\boxed{f^m = \text{id}_E}$$

Ex 21b

$$m = \dim G$$

$$\text{Ma} \exists H \subset E, \begin{cases} F \oplus H = E \\ H \oplus G = E \end{cases} \Leftrightarrow \dim F = \dim G$$

$$\Rightarrow \dim F = \dim G = n - \dim H$$

$$\Leftrightarrow p = \dim G = \dim F$$

$$\text{si } p = n \text{ ou } p = 0 : H = \{0\} \text{ ou } H = E$$

Lemme F, G sous-espaces de E

$$F \cup G \subseteq E$$

$$\text{Qd} : \text{si } F \subseteq G \text{ ou } G \subseteq F : \dim F, \dim G \leq n$$

$$\exists a \in E \setminus \{0\} \text{ tq } a \notin F \text{ ou } a \notin G$$

$$\text{cas 1} : \exists a_1 \in F, a_2 \notin F, \exists a_2 \in G, a_2 \notin F$$

$$\text{alors } a_1, a_2 \notin F$$

$$a_2 \in G$$

Récurrence $\downarrow$ Initialisation : si $p = n-1$

Par le lemme $\exists a \in E \setminus F \cup G$

$$E = F \oplus \text{vect} a$$

$$E = G \oplus \text{vect} a$$

Hérédité Sup. rang $p+1$

Par lemme : $\exists a \in E \setminus F \cup G$

$$F' = F \oplus \text{vect} a$$

$$G' = G \oplus \text{vect} a$$

