

30/09

[Ex 25c]

* Soit $I_0 = I_n \Rightarrow$ intervalles disjoints de $\mathbb{R}$

Soit $\varphi: \{R_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$
 $P \mapsto (\int_{I_k} P(x) dx)_{k \in \{0, \dots, n\}}$

Theorème du rang: $\dim \ker \varphi = n+2$
 donc $\dim \text{Im} \varphi = n+2 - \dim \ker \varphi \geq 1$
 car $\dim \ker \varphi \leq n+1$

Donc $\exists P \in R_n[X] \setminus \{0\}$ tq $\forall k \in \{0, \dots, n\}, \int_{I_k} P(x) dx = 0$

* Pour qqa $\int_{I_k} P = 0$, il faut une racine sur I_k
 donc P admet au moins une racine

or $P \in R_n[X]$ admet au plus n racines

Ainsi: $P=0$

$\rightarrow \exists P \in R_n[X]$ satisfaisant ces conditions

[Ex 25]

Soit $f \in C^1(\mathbb{C})$, $P = \dim \mathbb{C}$
 $\forall x \in \mathbb{C}, K_x := \{f'(a) : a \in A\}$ fini

Soit $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la base de $\mathbb{C}$

Si $i \neq j$, $f'(e_i) \neq f'(e_j)$: évident!!

Ainsi $\exists i \neq j$ tq $f'(e_i) = f'(e_j) = 0$
 or $f \in C^1(\mathbb{C})$ (car f', f aussi)

Par injectivité: $e_i = f^{j-i}(e_j)$

on pose $n_i = j-i$
 $\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall a \in \mathbb{N}, \sum n_i (e_i) = e_i$

$$\dim(N_1, \dots, N_p) = m$$

$$\forall i \in [1, p], \forall e_i \in N_i, \quad \int \cdot m_k(e_i) = e_i$$

Pour $k=1$

$$\forall i \in N_1, \quad f^m(e_i) = e_i$$

Ainsi f^m est id_E coïncident sur une base

$$\boxed{f^m = \text{id}_E}$$

Ex 21b

$$n = \dim E$$

$$M_q \exists H \subset E, \quad \begin{cases} F \oplus H = E \\ H \oplus H = E \end{cases} \text{ ou } \dim F = \dim G$$

$$\Rightarrow \dim F = \dim G = n - \dim H$$

$$\Leftrightarrow p = \dim F = \dim G$$

si $p = n$ ou $p = 0$: $H = \{0\}$ ou $H = E$

Lemme F, G sous-espaces de E

$$F \cup G \subseteq E$$

Q1 : si $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$: $\dim F, \dim G \leq n$

$\exists a \in E \setminus \{0\}$, tq $a \in F$ ou $a \in G$

cas 1 : $\exists a_1 \in F, a_2 \in G / \exists a_2 \in F, a_1 \in G$

alors $a_1, a_2 \in F$

$\in G$

Récurrence ↓ Initialisation : si $p = n+1$

Par le lemme $\exists a \in E \setminus F \cup G$

$$\begin{cases} E = F \oplus \text{vect} a \\ E = G \oplus \text{vect} a \end{cases}$$

$$E = G \oplus \text{vect} a$$

Hérédité Supp. rang $p+1$

Par lemme : $\exists a \in E \setminus F \cup G$

$$F' = F \oplus \text{vect} a$$

$$G' = G \oplus \text{vect} a$$