Ex 1437 Ulgane

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(Ax|x)}{\|x\|^2} \end{cases} \quad , \quad A \in S_n(\mathbb{R})$$

a)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$

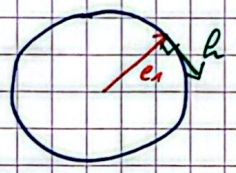
$$f(x) = \left(\frac{Ax}{\|x\|^2} \middle| \frac{x}{\|x\|} \right)$$

$$f(\mathbb{R}^n) = f(S)$$

D'après le thm des bornes atteintes : $\exists e_1 \in S$ tq $f(e_1) = \max\{f(x), x \in S\}$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \leq f(e_1)$

c et l)



Pour $h \in \mathbb{R}^n$ tq $e_1 + h \in S$,

$$f(e_1 + h) = f(e_1) + \overrightarrow{\text{grad}}\, f(e_1) . h + o(\|h\|)$$

$$(A(e_1+h) | e_1+h) = \underbrace{(Ae_1|e_1)}_{f(e_1)} + \underbrace{(Ah|e_1) + \overset{(Ah|e_1)}{\cancel{(h|Ae_1)}}}_{= (2Ae_1|h)} + \underbrace{(Ah|h)}_{o(\|h\|)}$$

Par identification $\overrightarrow{\text{grad}}(f(e_1)) = 2Ae_1$

Fagebaume :

$$\begin{cases} g(x) = (Ax|x) \quad , \quad f(x) = \dfrac{g(x)}{\|x\|^2} \\ \overrightarrow{\text{grad}}(g(e_1)) = 2Ae_1 \\ 0_{\mathbb{R}^n} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(e_1) = \dfrac{1}{\|e_1\|} \overrightarrow{\text{grad}}(g(e_1)) = \dfrac{2e_i}{\|e_1\|^4} g(e_1) \quad , \quad \|e_1\| = 1 \end{cases}$$

Donc $\overrightarrow{\text{grad}}(f(e_1)) = 2Ae_1 - 2g(e_1)e_1 = 0$ donc e_1 vecteur propre de A.

d) Soit $F = e_1^\perp$

Pour $y \in F$, $(Ay \mid e_1) = (Ae_1 \mid y) = 0$

On peut poser

$$f_2 : \begin{array}{l} F \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(Ax \mid x)}{\|x\|^2} \end{array}$$

F est stable par A

Par HR $(n-1)$, $\underbrace{f|_F}$ diag dans une bon

donc f diag dans une bon