Exercice 1400 Nicolas

$f \ \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{n^2}$, $|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n}\, \|x-y\|_2$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^{n^2}$

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_0^1 \nabla f(tx + (1-t)y)(x-y)\, dt \right|$$ par la règle de la chaine*

$$\underset{I.T}{\leq} \int_0^1 |\nabla f(tx + (1-t)y)(x-y)|\, dt$$

$$\underset{C.S}{\leq} \int_0^1 \|\nabla f(tx + (1-t)y)\|_2 \, \|x-y\|_2 \, dt$$

$$\leq \|x-y\|_2 \int_0^1 \|\nabla f(tx + (1-t)y)\|_2 \, dt$$

Soit $a \in \mathbb{R}^n$

$$\|\nabla f(a)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{n}$$

Donc $\boxed{|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n}\, \|x-y\|_2}$

* $g(t) = f(tx + (1-t)y)$

$g'(t) = \nabla f(tx + (1-t)y) \cdot (x-y)$

$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\, dt \Rightarrow \dots$