Ex 1387 Antoine L

Pour $n \geq 2$: $\Sigma = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} a_i = 0, \ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1 \right\}$

$S_n = a_1 a_2 + \dots + a_n a_1$

$X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \Sigma$

$Y = \begin{pmatrix} a_n \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ $\qquad S_n = \langle X, Y \rangle$

On cherche $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $AX = Y$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix}$ (1 en bas à gauche et sur la diag supérieure $(i, i+1)$)

$$A = \underbrace{\frac{A + A^T}{2}}_{S_1 \in S_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{A - A^T}{2}}_{A_1 \in A_n(\mathbb{R})}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & & & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 X = \begin{pmatrix} a_2 - a_n \\ a_3 - a_1 \\ \vdots \\ a_1 - a_{n-1} \end{pmatrix}$$

donc $\langle A_1 X | X \rangle = a_1 (a_2 - a_n) + \dots + a_n (a_1 - a_{n-1}) = 0$

Donc $\langle AX, X \rangle = \langle A_1 X | X \rangle + \langle S_1 X | X \rangle = \langle S_1 X | X \rangle = S_n$

$\underbrace{S_1}_{\in S_n(\mathbb{R})} = \frac{A + A^T}{2} = \frac{A + A^{n-1}}{2}$

↳ diagonalisable et S_1 polynome en A donc S_1, A commutent donc sont codiagonalisables

$Sp(S_1) = \left\{ \frac{\lambda + \lambda^{n-1}}{2}, \ \lambda \in Sp(A) \right\}$

Or $Sp(A) = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$ vu dans un autre exo

Donc ~~$Sp(A)$~~

$$Sp(S_1) = \left\{ \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} + e^{2ik\pi\frac{n-1}{n}}}{2}, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

$$Sp(S_1) = \left\{ \cos\left(\frac{2ik\pi}{n}\right), k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{D'où } \Sigma = \underset{\text{sphère unitée}}{S_1} \cap H \\ \text{où } H = \text{vect}(1, \dots, 1)^{\perp} \end{array}}$$

Par quotient de Rayleigh sur $H \cap S_1$ S_n est max pour x vecteur propre associé à $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

donc S_n maximale pour $S_n = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

↳ pas $\cos(0)$ car vecteur propre associé à $\cos(0) = 1$ n'est pas dans Σ.

On essaye donc avec la 2e plus grande vp et ça passe.

Ex 1437 Ulgane

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(Ax|x)}{\|x\|^2} \end{cases} \quad , \quad A \in S_n(\mathbb{R})$$

a)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$

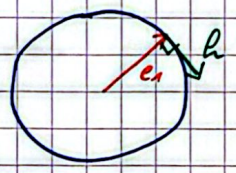
$$f(x) = \left(\frac{Ax}{\|x\|^2} \middle| \frac{x}{\|x\|} \right)$$

$$f(\mathbb{R}^n) = f(S)$$

D'après le thm des bornes atteintes : $\exists e_1 \in S$ tq $f(e_1) = \max\{f(x), x \in S\}$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \leq f(e_1)$

c et l)



Pour $h \in \mathbb{R}^n$ tq $e_1 + h \in S$,

$$f(e_1 + h) = f(e_1) + \overrightarrow{\text{grad}}\, f(e_1) . h + o(\|h\|)$$

$$(A(e_1+h) | e_1+h) = \underbrace{(Ae_1|e_1)}_{f(e_1)} + \underbrace{(Ah|e_1) + \overset{(Ah|e_1)}{\cancel{(h|Ae_1)}}}_{= (2Ae_1|h)} + \underbrace{(Ah|h)}_{o(\|h\|)}$$

Par identification $\overrightarrow{\text{grad}}(f(e_1)) = 2Ae_1$

Fagebaume :

$$\begin{cases} g(x) = (Ax|x) \quad , \quad f(x) = \dfrac{g(x)}{\|x\|^2} \\ \overrightarrow{\text{grad}}(g(e_1)) = 2Ae_1 \\ 0_{\mathbb{R}^n} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(e_1) = \dfrac{1}{\|e_1\|} \overrightarrow{\text{grad}}(g(e_1)) = \dfrac{2e_i}{\|e_1\|^4} g(e_1) \quad , \quad \|e_1\| = 1 \end{cases}$$

Donc $\overrightarrow{\text{grad}}(f(e_1)) = 2Ae_1 - 2g(e_1)e_1 = 0$ donc e_1 vecteur propre de A.

d) Soit $F = e_1^\perp$

Pour $y \in F$, $(Ay \mid e_1) = (Ae_1 \mid y) = 0$

On peut poser

$$f_2 : \begin{array}{l} F \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(Ax \mid x)}{\|x\|^2} \end{array}$$

F est stable par A

Par HR $(n-1)$, $\underbrace{f|_F}$ diag dans une bon

donc f diag dans une bon

Ex 1371 Augustin

a) Mq U_1, U_2 ouverts

* $\tilde{U_1} = \mathbb{R}^2 \setminus U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x-y \leq 0\}$

Mq $\tilde{U_1}$ fermé

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{U_1}^{\mathbb{N}}$, $\exists\, l \in \mathbb{R}^2$, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

On écrit $a_n = (a_{1n}, a_{2n})$; $l = (l_1, l_2)$

$\forall n \quad a_{n1} - a_{n2} \leq 0$

Passage à la lim : $l_1 - l_2 \leq 0$ ie $l \in \tilde{U_1}$

Donc $\tilde{U_1}$ fermé, U_1 ouvert.

* Idem pour U_2

$$\Psi : \begin{cases} U_1 \to U_2 \\ (x,y) \mapsto (xy,\ x+y) \end{cases}$$

$(x,y) \in U_1$, $(u,v) \in U_2$

$$(S) : \begin{cases} xy = u \\ x+y = v \end{cases} \iff \begin{cases} u - yv + y^2 = 0 \\ x = v - y \end{cases}$$

Pour $u - Xv + X^2$: $\Delta = v^2 - 4u > 0$ car $(u,v) \in U_2$

2 Racines : $y_{1,2} = \frac{v}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{v^2 - 4u}$

Donc $(S) \iff \begin{cases} y = \frac{v}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{v^2 - 4u} \\ x = \frac{v}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{v^2 - 4u} \end{cases}$

Or si $(x,y) \in U_1$, $x > y$ donc $(S) \iff \begin{cases} y = \frac{v}{2} - \sqrt{v^2 - 4u} \\ x = \frac{v}{2} + \sqrt{v^2 - 4u} \end{cases}$

1371 suite

D'où Ψ est bijective.

b) Analyse :

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U_1, \mathbb{R})$, $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 3(x-y) f$

Posons $g = f \circ \Psi^{-1}$ ie $g \circ \Psi = f$

i.e. $\forall (x,y) \in U_1$, $f(x,y) = g(xy, x+y)$

g est $\mathcal{C}^1$ par la règle de la chaine et pour $(x,y) \in U_1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

L'Equation devient avec $\Psi(x,y) = (u,v)$:

$$\cancel{(y-x)} \frac{\partial g}{\partial u} = 3 \cancel{(y-x)} f(x,y) \underset{x>y}{\Leftrightarrow} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 3 f(x,y)$$

Donc $\frac{\partial g}{\partial u} = 3 g(u,v)$ $\forall (u,v) \in U_2$

Donc il existe $C \in \mathcal{C}_1(U_2, \mathbb{R})$ tq g $u,v \mapsto C(v) e^{3u}$

ie $\forall (x,y) \in U_1$, $f(x,y) = C(x+y) e^{3xy}$

Synthèse : elles sont solution.

D'où solutions sont $\boxed{\{ (x,y) \mapsto C(x+y) e^{3xy}, \ C \in \mathcal{C}^1(U_1, \mathbb{R}) \}}$

Ex 1374 Nicolas

$$\varphi : \begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^{-1} \end{cases}$$

Explication Fagebaume :

$$* \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k H^k\right)}_{\to \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k H^k} (I_n + H) = I_n + \underbrace{(-1)^p H^{p+1}}_{\substack{\to 0 \\ p \to +\infty}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k H^k\right)}_{= (I_n+H)^{-1}} (I_n + H) = I_n$$

a)

Soit $H \in GL_n(\mathbb{R})$

$\varphi(I_n + H) = (I_n + H)^{-1}$, si $\|H\| < 1$ (norme quelconque)

$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n H^n$ * (le n n'est pas celui de $GL_n(\mathbb{R})$)

$= I_n - H + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n H^n$

$= I_n - H + H^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n H^n$

$\varphi(I_n + H) = I_n - H + H^2 (I_n - H)^{-1}$

Et $(I_n - H)^{-1} \xrightarrow[H \to 0]{} I_n^{-1} = I_n$ par continuité de φ

donc $\varphi(I_n + H) = I_n + H + o(\|H\|)$

donc $\boxed{d\varphi(I_n).H = -H}$

b) $M \in GL_n(\mathbb{R})$

$\varphi(M + H) = (M + H)^{-1} \cancel{= M^{-1}(I_n + M^{-1}H)^{-1}}$ passage à l'inverse inverse l'ordre de multiplication

$= M^{-1}(I_n + HM^{-1})^{-1}$

$= M^{-1}(I_n - HM^{-1} + o(\|H\|))$

$\varphi(M + H) = M^{-1} - M^{-1}HM^{-1} + o(\|H\|)$

$$\boxed{d\varphi(M).H = -M^{-1}HM}$$

Exercice 1400 Nicolas

$f \ \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{n^2}$, $|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n}\, \|x-y\|_2$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^{n^2}$

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_0^1 \nabla f(tx + (1-t)y)(x-y)\, dt \right|$$ par la règle de la chaine*

$$\underset{I.T}{\leq} \int_0^1 |\nabla f(tx + (1-t)y)(x-y)|\, dt$$

$$\underset{C.S}{\leq} \int_0^1 \|\nabla f(tx + (1-t)y)\|_2 \, \|x-y\|_2 \, dt$$

$$\leq \|x-y\|_2 \int_0^1 \|\nabla f(tx + (1-t)y)\|_2 \, dt$$

Soit $a \in \mathbb{R}^n$

$$\|\nabla f(a)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{n}$$

Donc $\boxed{|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n}\, \|x-y\|_2}$

* $g(t) = f(tx + (1-t)y)$

$g'(t) = \nabla f(tx + (1-t)y) \cdot (x-y)$

$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\, dt \Rightarrow \dots$