Exercice 1384

William

(exo destructeur)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ $\quad f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tq $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

$g(r, t) \mapsto f(a + r\cos t, b + r\sin t)$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0 \text{ (cf Laplacien en polaire)}$$

donc
$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 g(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,t) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t)\right)dt = 0$$

$$= F''(r) + \frac{1}{r}F'(r) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial g}{\partial t}\right]_0^{2\pi}$$

or $\left[\dfrac{\partial g}{\partial t}\right]_0^{2\pi} = 0$ donc $F''(t) + \dfrac{1}{r}F'(r) = 0 \ (E)$

on resout E

$$F''(r) = -\frac{1}{r}F'(r)$$

$$F''(r) = -\frac{F'(r)}{r}$$

donc $\dfrac{F''(r)}{F'(r)} = -\dfrac{1}{r}$ si F' ne s'annule pas sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ie F pas constante

$$\int_A^r \frac{F''(u)}{F'(u)}du = [\ln(F'(u))]_A^r = -\ln(r) = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$F''(r) = \frac{K}{r}$$

donc $F(r) = K\ln(r) + \beta$

F est prolongeable par continuité en 0 avec $F(0) = \int_0^{2\pi} f(a, b)\,dr \in \mathbb{R}$

donc $\lim\limits_{r \to 0} F$ est finie : $\boxed{K = 0}$