Ex 1451 Ulysse

$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$y'' + 2y' + 2y = f(t)$ (E)

Soit y_1 et y_2 sol$^\circ$ périodiques de (E)

$$(y_1 - y_2)'' + 2(y_1 - y_2)' + 2(y_1 - y_2) = 0$$

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4\times 2 = -4 \rightarrow \frac{-2 \pm i\sqrt{4}}{2} = -1 \pm i$$

$$y_H(t) = Ae^{-t+it} + Be^{-t-it} = e^{-t}(Ae^{it} + Be^{-it})$$

Or y_2, y_1 bornées $\Rightarrow y_1 - y_2$ bornée

$\Rightarrow t \mapsto e^{-t}(Ae^{it} + Be^{-it})$ bornée

$\Rightarrow \boxed{A = B = 0}$

Ex 1378 Augustin

$$f : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t) \end{cases} \quad C^1$$

a) Soit $x, y \in E$

$$(\nabla f(x) | y - x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i - x_i)$$

$$\psi : t \mapsto (1-t)f(x) + tf(y) - \frac{t(1-t)}{2}\|y - x\|^2$$

$$\varphi : \begin{cases} [0,1] \to E \\ t \mapsto (1-t)x + ty \end{cases}$$

φ et ψ C^1 sur $[0,1]$

Et $\forall t \in [0,1]$, $f(\varphi(t)) \leq \psi(t)$

Et $\forall t \in [0,1]$, $\psi'(t) = f(y) - f(x) - \frac{1-2t}{2}\|x-y\|^2$

Et par RdC, $\forall t \in [0,1]$,

$$(f\circ\varphi)'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t))(y_i - x_i)$$

On veut $\psi'(0) \geq (f\circ\varphi)'(0)$

On a $f(\varphi(0)) = f(x)$

$\psi(0) = f(x)$

Donc avec $(*)$, $\forall t > 0$, $\frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} \geq \frac{(f\circ\varphi)(t) - f\circ\varphi(0)}{t}$

Donc $t \to 0$, $\psi'(0) \geq (f\circ\varphi)'(0)$ Donc ok

b) Montrons que, $\psi'(1) \leq (f\circ\varphi)'(1)$

$\psi(1) = f(y)$

$(f\circ\varphi)(1) = f(y)$

Donc avec $(*)$, $\forall t \in [0,1[$,

$$\frac{\psi(t) - \psi(1)}{t-1} \leq \frac{f\circ\varphi(t) - f\circ\varphi(1)}{t-1}$$

Par $t \to 1^-$, $\psi'(1) \leq (f\circ\varphi)'(1)$

Donc $f(y) - f(x) + \frac{1}{2}\|y-x\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)(y_i - x_i)$

Et ok avec a)