Ex 1374 Nicolas

$$\varphi : \begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^{-1} \end{cases}$$

Explication Fagebaume :

$$* \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k H^k\right)}_{\to \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k H^k} (I_n + H) = I_n + \underbrace{(-1)^p H^{p+1}}_{\xrightarrow[p \to +\infty]{} 0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k H^k\right)}_{= (I_n + H)^{-1}} (I_n + H) = I_n$$

a)

Soit $H \in GL_n(\mathbb{R})$

$\varphi(I_n + H) = (I_n + H)^{-1}$, si $\|H\| < 1$ (norme quelconque)

$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n H^n$ * (le n n'est pas celui de $GL_{\underline{n}}(\mathbb{R})$)

$= I_n - H + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n H^n$

$= I_n - H + H^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n H^n$

$\varphi(I_n + H) = I_n - H + H^2 (I_n - H)^{-1}$

Et $(I_n - H)^{-1} \xrightarrow[H \to 0]{} I_n^{-1} = I_n$ par continuité de φ

donc $\varphi(I_n + H) = I_n + H + o(\|H\|)$

donc $\boxed{d\varphi(I_n).H = -H}$

b) $M \in GL_n(\mathbb{R})$

$\varphi(M + H) = (M + H)^{-1}$ ~~$= M^{-1}(I_n + M^{-1}H)^{-1}$~~

$= M^{-1}(I_n + HM^{-1})^{-1}$ passage à l'inverse inverse l'ordre de multiplication

$= M^{-1}(I_n - HM^{-1} + o(\|H\|))$

$\varphi(M + H) = M^{-1} - M^{-1}HM^{-1} + o(\|H\|)$

$$\boxed{d\varphi(M).H = -M^{-1}HM}$$