Ex 1371 Augustin

a) Mq U_1, U_2 ouverts

* $\tilde{U_1} = \mathbb{R}^2 \setminus U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x-y \leq 0\}$

Mq $\tilde{U_1}$ fermé

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{U_1}^{\mathbb{N}}$, $\exists\, l \in \mathbb{R}^2$, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

On écrit $a_n = (a_{1n}, a_{2n})$; $l = (l_1, l_2)$

$\forall n \quad a_{n1} - a_{n2} \leq 0$

Passage à la lim : $l_1 - l_2 \leq 0$ ie $l \in \tilde{U_1}$

Donc $\tilde{U_1}$ fermé, U_1 ouvert.

* Idem pour U_2

$$\Psi : \begin{cases} U_1 \to U_2 \\ (x,y) \mapsto (xy,\ x+y) \end{cases}$$

$(x,y) \in U_1$, $(u,v) \in U_2$

$$(S) : \begin{cases} xy = u \\ x+y = v \end{cases} \iff \begin{cases} u - yv + y^2 = 0 \\ x = v - y \end{cases}$$

Pour $u - Xv + X^2$: $\Delta = v^2 - 4u > 0$ car $(u,v) \in U_2$

2 Racines : $y_{1,2} = \frac{v}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{v^2 - 4u}$

Donc $(S) \iff \begin{cases} y = \frac{v}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{v^2 - 4u} \\ x = \frac{v}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{v^2 - 4u} \end{cases}$

Or si $(x,y) \in U_1$, $x > y$ donc $(S) \iff \begin{cases} y = \frac{v}{2} - \sqrt{v^2 - 4u} \\ x = \frac{v}{2} + \sqrt{v^2 - 4u} \end{cases}$

1371 suite

D'où Ψ est bijective.

b) Analyse :

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U_1, \mathbb{R})$, $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 3(x-y) f$

Posons $g = f \circ \Psi^{-1}$ ie $g \circ \Psi = f$

i.e. $\forall (x,y) \in U_1$, $f(x,y) = g(xy, x+y)$

g est $\mathcal{C}^1$ par la règle de la chaine et pour $(x,y) \in U_1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

L'Equation devient avec $\Psi(x,y) = (u,v)$:

$$\cancel{(y-x)} \frac{\partial g}{\partial u} = 3 \cancel{(y-x)} f(x,y) \underset{x>y}{\Leftrightarrow} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 3 f(x,y)$$

Donc $\frac{\partial g}{\partial u} = 3 g(u,v)$ $\forall (u,v) \in U_2$

Donc il existe $C \in \mathcal{C}_1(U_2, \mathbb{R})$ tq g $u,v \mapsto C(v) e^{3u}$

ie $\forall (x,y) \in U_1$, $f(x,y) = C(x+y) e^{3xy}$

Synthèse : elles sont solution.

D'où solutions sont $\boxed{\{ (x,y) \mapsto C(x+y) e^{3xy}, \ C \in \mathcal{C}^1(U_1, \mathbb{R}) \}}$