Exercices TD 19/02

1271 (LUCAS) X = nombre de boules blanches qui restent

$$\mathbb{P}(X=k) \overset{FPT}{=} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{P}(\text{"on a tiré } n-k+1 \text{ B puis 1 R"})}_{\mathbb{P}_1} \times \underbrace{\mathbb{P}(\text{"on a tiré } n \text{ boules"})}_{\text{loi géométrique } = (1-p)\,p^{n-1}}$$

- $$\mathbb{P}_1 = \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{1^{ère}\ B} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \underbrace{\frac{k+1}{k+2}}_{\text{dernière } B} \times \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{R} = \frac{1}{n}$$

- $$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{n}(1-p)\,p^{n-1}}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}(X=k) = (1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{k}{n}\,p^{n-1} = (1-p)\sum_{1\leq k<n} \frac{k}{n}\,p^{n-1}$$

donc
$$\mathbb{E}(X) = (1-p)\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\,p^{n-1}\right)$$
$$= (1-p)\left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}\,p^{n-1} \times \frac{n(n+1)}{2}\right)$$
$$= (1-p)\frac{p}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}(n+1)\,p^{n}$$
$$= \frac{(1-p)p}{2}\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} n\,p^{n-1}}_{=\frac{1}{(1-p)^2}}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{p}{2(1-p)}}$$

1313 (SINON) X, Y 2 vad indépendantes suivant $g(p)$

$$M = \begin{pmatrix} X & X \\ -Y & -Y \end{pmatrix}$$

M nilpotente $\iff (M=0 \cup M^2=0)$

$$M^2 = \begin{pmatrix} X & X \\ -Y & -Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & X \\ -Y & -Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^2-XY & X^2-XY \\ Y^2-XY & Y^2-XY \end{pmatrix}$$

$(M \text{ nilpotente}) = (X=0, Y=0) \cup (X^2=Y^2)$

$\mathbb{P}(M \text{ nilpotente}) = \mathbb{P}(X = Y)$

- $(X = Y) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (X = k, Y = k)$

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = k, Y = k)$$

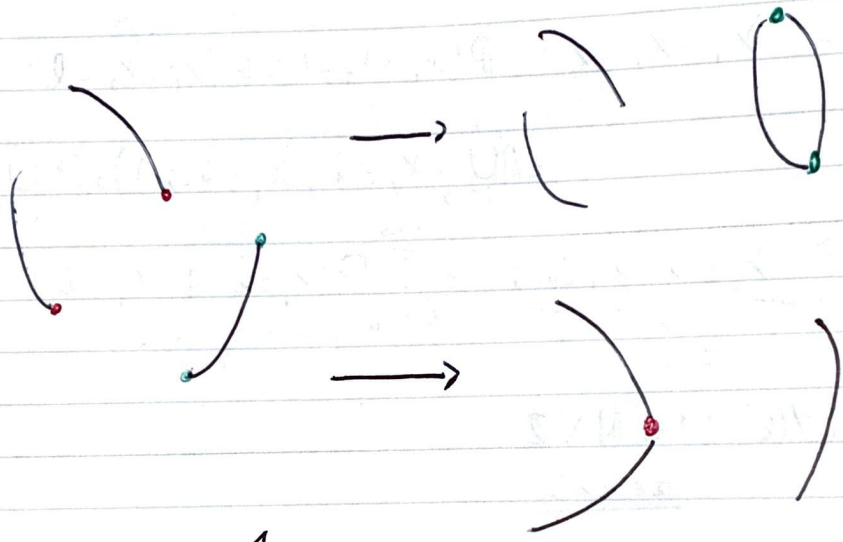
$$= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 (1-p)^{2k-2}$$

$$= \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p^2}{1-(1-2p+p^2)} = \frac{p^2}{2p-p^2} = \frac{p}{2-p}$$

D'où $\boxed{\mathbb{P}(M \text{ nilpotente}) = \frac{p}{2-p}}$

1278 (ULYSSE)



a) $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{1}{2N-1}$ → on choisit un bout au hasard et il reste $2N-1$ pour le deuxième

soit $\dfrac{N}{\binom{2N}{2}} = \dfrac{1}{2N-1}$ ← cordes

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2N-1}}$$

b) $Y = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{X_k}$ avec $X_k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ forme un cycle} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_k}) = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\mathbb{P}(X_k = 1)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2(N-k)+1}$$

pt clé : à chaque étape on "supprime" une corde :

nœud : -1 corde

pas nœud : forme corde + grande à partir des 2 autres

donc $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{N-k}{\binom{2(N-k)}{2}}$