$\mathbb{P}(M \text{ nilpotente}) = \mathbb{P}(X = Y)$

- $(X = Y) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (X = k, Y = k)$

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = k, Y = k)$$

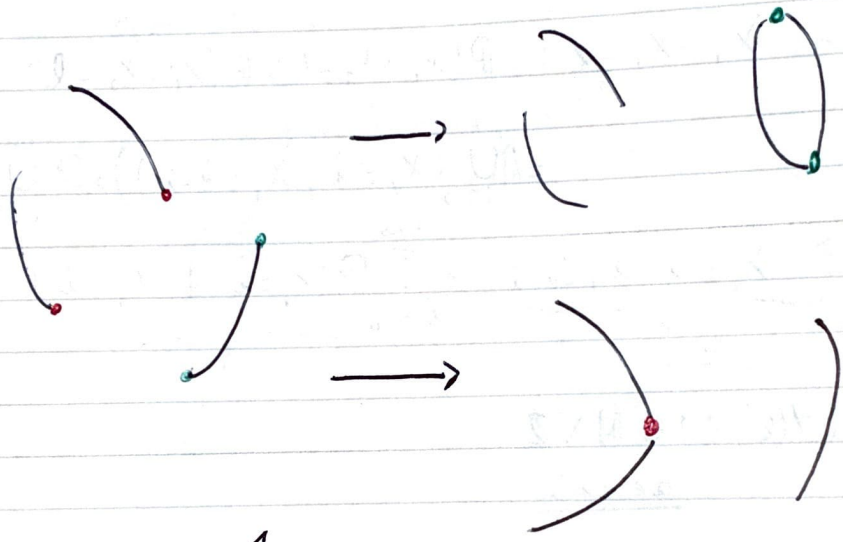
$$= \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 (1-p)^{2k-2}$$

$$= \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p^2}{1-(1-2p+p^2)} = \frac{p^2}{2p-p^2} = \frac{p}{2-p}$$

D'où $\boxed{\mathbb{P}(M \text{ nilpotente}) = \frac{p}{2-p}}$

1278 (ULYSSE)



a) $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{1}{2N-1}$ → on choisit un bout au hasard et il reste $2N-1$ pour le deuxième

soit $\dfrac{N}{\binom{2N}{2}} = \dfrac{1}{2N-1}$ ← cordes

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2N-1}}$$

b) $Y = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{X_k}$ avec $X_k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ forme un cycle} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_k}) = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\mathbb{P}(X_k = 1)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2(N-k)+1}$$

pt clé : à chaque étape on "supprime" une corde :

nœud : -1 corde

pas nœud : forme corde + grande à partir des 2 autres

donc $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{N-k}{\binom{2(N-k)}{2}}$