1261 Effhenics

$X_1, \dots, X_n$ VAD réelles, mi

$S_n = X_1 + \dots + X_n$

a) $\lambda \in \mathbb{R}$ $E(e^{\lambda S_n}) = E(e^{\lambda(X_1 + \dots + X_n)})$

$= E\left(\prod_{k=1}^{n} e^{\lambda X_k}\right)$

$(e^{\lambda X_k})_{k \in [\![1,n]\!]}$ sont mi

D'où $E(e^{\lambda S_n}) = \prod_{k=1}^{n} E(e^{\lambda X_k})$

b) $X_k = a_k Y_k$, $a_k \in \mathbb{R}$

$Y_k \sim U(\{-1, 1\})$

$E(e^{\lambda S_n}) = \prod_{k=1}^{n} E(e^{\lambda a_k Y_k})$

Soit $k \in [\![1,n]\!]$

$E(e^{\lambda a_k Y_k}) = \frac{1}{2}(e^{\lambda a_k} + e^{-\lambda a_k})$

$E(e^{\lambda S_n}) = \prod_{k=1}^{n} ch(\lambda a_k)$

(ii) $\sigma_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$

$\mathbb{R}$

Mq $E(e^{\lambda S_n}) \leq \exp\left(\frac{\sigma_n^2 \lambda^2}{2}\right)$

$$= \exp\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} |\lambda a_k|^2}{2}\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{|\lambda a_k|^2}{2}\right)$$

Soit $T \in \mathbb{R}$

On a $e^{\frac{T^2}{2}} = \sum_{k \geq 0} \frac{T^{2k}}{2^k k!}$ et $ch(T) = \sum_{k \geq 0} \frac{T^{2k}}{(2k)!}$

Or $\forall k \geq 2$, $2 \leq k$

D'où pour $k \geq 1$, $2^k k! \leq (2k)!$

D'où $\frac{T^{2k}}{2^k k!} \geq \frac{T^{2k}}{(2k)!}$

D'où $ch(T) \leq e^{\frac{T^2}{2}}$

D'où $E(e^{\lambda S_n}) \leq \exp\left(\frac{\sigma_n^2 \lambda^2}{2}\right)$

(iii) Mq $P(|S_n| \geq n) \leq 2 \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_n^2}\right)$

On a $P(S_n \geq a) = P(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda a}) \leq \dfrac{E(e^{\lambda S_n})}{e^{\lambda a}}$

car $t \mapsto e^{\lambda t}$ est positive et strictement $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

Donc on a $P(S_n \geq a) \leq \dfrac{\exp\left(\frac{\sigma_n^2 \lambda^2}{2}\right)}{\exp(\lambda a)} = \exp\left(\frac{\sigma_n^2 \lambda^2}{2} - \lambda a\right)$

On étudie $f : \lambda \mapsto \dfrac{\sigma_n^2 \lambda^2}{2} - \lambda a$

On a $f'(\lambda) = \sigma_n^2 \lambda a$

$f'(\lambda) = 0$ on $\dfrac{a}{\sigma_n^2}$

On applique l'inégalité à $\dfrac{a}{\sigma_n^2}$

$P(S_n \geq a) \leq \exp\left(\dfrac{\sigma_n^2 a^2}{2\sigma_n^4} - \dfrac{a^2}{\sigma_n^2}\right) = \exp\left(-\dfrac{a^2}{2\sigma_n^2}\right)$

Or $P(|S_n| \geq a) = P(S_n \geq a) + P(S_n \leq -a)$

Mq, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $P(S_n = \alpha) = P(S_n = -\alpha)$
Mq $S_n$ et $-S_n$ suivent la même loi

Récurrence : $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$

$(S_{n+1} = \ell) = (S_n = \ell + 1 \text{ et } X_{n+1} = -1) \cup (S_n = \ell - 1 \text{ et } X_{n+1} = 1)$

$P(S_{n+1} = \ell) = P(_____) + P(_____)$

Or $X_{n+1}$ et $-X_{n+1}$, $S_n$ et $-S_n$ suivent la m̂ loi,
donc $S_{n+1}$ et $-S_{n+1}$ suivent la m̂ loi.

Donc $P(S_n \geq a) = P(S_n \leq -a)$

D'où $P(|S_n| \geq a) \leq 2\exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_n^2}\right)$

c) $(X_k)_{k \in [\![1, 10^6]\!]}$

$X_k$ $k$-ième lancer : $X_k \sim U\{-1, 1\}$

$(X=1) = P$

$(X=-1) = F$

$$X = \sum_{k=1}^{10^6} X_k$$

$P(\text{au moins } 10\,000\ P) = P(X \geq \underbrace{20000}_{=a=2\times10^4})$

$P(X \geq a) \leq \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_n^2}\right)$

$$\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{10^6} 1 = 10^6$$

$$= \exp\left(\frac{-4\times10^8}{2\times10^6}\right) = \exp(-200)$$

1237 Théodore

Rose n'est pas fané au bout de $n$ j

$Y = X - n$, $X > n$

$E(Y)$ ?

$$P(Y=k) = P(X=n+k \mid X>n) = \frac{P(X=n+k)}{P(X>n)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2^{n+k}}}{\sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^j}} = \frac{1}{2^k}$$