1260 William

1) a. $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]$,

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

i. $S_n \sim \mathcal{B}(n, x)$

• Par B-T :

$$P(S_n - E(S_n) \geq n\alpha) \leq \frac{V(S_n)}{n^2 \alpha^2}$$

Or $V(S_n) = nx(1-x)$

$\leq \frac{1}{4}$ (étude de fonction sur $[0,1]$)

$$P(|S_n - nx| \geq n\alpha) \leq \frac{x(1-x)}{n\alpha^2} \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$

ii. $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$ VAD

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underbrace{P(S_n = k)}_{= \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}$$

TR transfert

$$= B_n(f)(x)$$

b) f C^0 sur $[0,1]$ $\iff$ f uniformément continue sur $[0,1]$

$\Longrightarrow$ Si f C^0 sur $[0,1]$

- $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists (x_\delta, y_\delta) \in [0,1]^2$

$|x_\delta - y_\delta| \leq \delta$ et $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \varepsilon$

(*) $\left(\begin{array}{l} \cdot \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (x_n, y_n) \in [0,1]^2 \\ \text{tq } |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon \end{array} \right)$

Or (x_n) et (y_n) sont des suites formées, donc par BW, $x_{\psi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha \in [0,1]$

$y_{\psi(\varphi(n))} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha \in [0,1]$

- <u>C^0 de f en α:</u>

$f(x_{\psi(\varphi(n))}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\alpha)$

$f(y_{\psi(\varphi(n))}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\alpha)$

Donc dans (*), $|0| > \varepsilon > 0$ <u>Absurde</u>

Mq $\left| \sum_{k \in I_2(\alpha)} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k) \right| \leq 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)$

où $I_2(\alpha) = \left\{ k \in [\![0, n]\!],\ \underbrace{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha}_{\iff |k - nx| > n\alpha} \right\}$

$$\left| \sum_{k \in I_2(\alpha)} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k) \right| \leq \sum_{k \in I_2(\alpha)} \underbrace{\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|}_{\leq 2\|f\|_\infty} P(S_n = k)$$

$$\leq 2\|f\|_\infty \underbrace{\sum_{k \in I_2(\alpha)} P(S_n = k)}_{= P\left(\bigcup_{k \in I_2(\alpha)} (S_n = k)\right)}$$

or $P\left(\bigcup_{k \in I_2(\alpha)} S_n = k\right)$

$$= P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)$$

d'où le résultat.

(ii) mq $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$

$\cancel{|B_n(f)(x) - f(x)| = \left| \sum_{k \in I_2(\alpha)} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k \in I_2(\alpha)} f \right|}$

$$|B_n(f)(x) - f(x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(x) \right|$$

$$\underset{IT}{\leq} \sum_{k=0}^{n} \left| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right| \quad IT$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{= P(S_n = k)} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|$$

$$= \sum_{k \in I_1} \text{———}$$

$$+ \sum_{k \in I_2} \text{———}$$

$$\underset{\text{par (8)(i)}}{\leq} \frac{2\|f\|_\infty}{2n\alpha^2} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right) + \sum_{k \in I_1} P(S_n = k) \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|$$

On applique la continuité uniforme de f pour tout $k \in I_1$.

Donc $\forall k \in I_2$, $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha$ donc

$$\text{———}, \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \varepsilon \quad \text{où } \varepsilon > 0$$

D'où, $\left|B_n(f)(x) - f(x)\right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{n\alpha^2} \overbrace{P\left(\frac{S_n}{n} - x > \alpha\right)}^{\leq 1}$

$$+ \varepsilon \underbrace{\sum_{k \in I_1} P(S_n = k)}_{\leq 1}$$

D'où l'inégalité