(1189) x algébrique $\iff$ x racine de $P \in \mathbb{Z}[X]$

(AMBROISE DE SON PLEIN GRÉ) Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $\text{card}\{P \in \mathbb{Z}[X], \deg P \leq d\} = \text{card}\,\mathbb{Z}^d = \text{card}\,\mathbb{N}$ car $\mathbb{Z}$ dénombrable

Or pour $P \in \mathbb{Z}_d[X]$, P admet au plus d racines

Donc l'ensemble des nombres algébriques de deg d est dénombrable : A_d

par produit cartésien.

b) $\bigcup_{d \in \mathbb{N}^*} A_d$ = union dénombrable d'ensemble dénombrable (par ⓐ)

<u>donc dénombrable</u>

(1337) $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^{+*}$

(ULYSSE) hyp : $\mathbb{E}(X^2) = 1$ et $\mathbb{E}(X) \geq a$.

Mq :

Soit $\lambda \in [0,1)$, $\mathbb{P}(X \geq \lambda a) \geq (1-\lambda)^2 a^2$

- $X = X\mathbb{1}_{X \geq \lambda a} + X\mathbb{1}_{X < \lambda a}$

$$\mathbb{E}(X) \leq \underbrace{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{X \geq \lambda a})}_{\text{CS} : \leq \sqrt{\underset{1}{\mathbb{E}(X^2)} \times \underset{\mathbb{P}(X \geq \lambda a)}{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X \geq \lambda a}^2)}}} + \underbrace{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{X < \lambda a})}_{< \lambda a}$$

Donc $\underbrace{\mathbb{E}(X)}_{a \leq \text{ par hyp}} - \lambda a \leq \sqrt{\mathbb{P}(X \geq \lambda a)}$

$\overset{(\cdot)^2}{\Longrightarrow}$ $\boxed{\mathbb{P}(X \geq \lambda a) \geq (1-\lambda)^2 a^2}$

(1253) (KENAN) P : " avoir pile " , $\mathbb{P}(P) = p$

F : " avoir face "

X vad , X = " temps d'obtention du motif FP " ~~X = F~~

$(X = n) = (\ldots \underset{n-1}{F}\underset{n}{P})$ et jamais FP avant cela

- $\mathbb{P}(\underbrace{P \ldots P}_{k \text{ fois}}\underbrace{F \ldots F}_{n-k-1 \text{ fois}}) = p^k (1-p)^{n-k-1}$

FPT : $\mathbb{P}(X=n) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\mathbb{P}(X=n \mid \overbrace{P..P}^{k}\overbrace{F..F}^{n-k-1})}_{=p \text{ car ne dépend pas de ce qui précède et il faut faire } P} \times \mathbb{P}(\overbrace{P..P}^{k}\overbrace{F..F}^{n-k-1})$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} p \times p^k (1-p)^{n-k-1} = (1-p)^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{k+1}$$

1er cas $p = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{p}{1-p} = 1\right)$

$$\boxed{\mathbb{P}(X=n) = n(1-p)^n}$$

2ème cas $p \neq \frac{1}{2}$

$$\mathbb{P}(X=n) = (1-p)^n \times \frac{p}{1-p} \times \frac{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^n}{1-\frac{p}{1-p}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X=n) = p\,\frac{(1-p)^n - p^n}{1-2p}}$$

• Y : temps d'apparition de PP
(Le professeur)

P_1 : on obtient P au 1er lancer
F_1 : ___ F ___

$a_n = \mathbb{P}(Y=n)$

$a_2 = p^2 = \mathbb{P}(P_1P_2)$
$a_3 = qp^2 = \mathbb{P}(F_1P_2P_3)$
$a_4 = \mathbb{P}(F_1F_2P_3P_4) + \mathbb{P}(P_1F_2P_3P_4)$
$= q^2p^2 + qp^3$
$= qp^2(q+p) = qp^2$

$n \geq 3$

$$\mathbb{P}(Y=n) \overset{FPT}{=} \mathbb{P}(Y=n \mid P_1) \times \overbrace{\mathbb{P}(P_1)}^{=p} + \underbrace{\mathbb{P}(Y=n \mid F_1)}_{=\mathbb{P}(Y=n-1) \to \text{ "comme si on avait perdu un lancer en moins ça n'influe pas sur la suite"} \atop =a_{n-1}} \times \overbrace{\mathbb{P}(F_1)}^{=q}$$

• $\mathbb{P}(Y=n \mid P_1) = \underbrace{\mathbb{P}(Y=n \mid P_1P_2)}_{=0 \text{ car sinon PP déjà atteint avant } n}\mathbb{P}(P_2) + \underbrace{\mathbb{P}(Y=n \mid P_1F_2)}_{=a_{n-2} \text{ de la même façon}} \times \underbrace{\mathbb{P}(F_2)}_{=q}$

D'où $\boxed{a_n = pq\,a_{n-2} + q\,a_{n-1}}$ $\left(\text{CI} : a_2 = p^2,\ a_3 = p^2q\right)$

hasard."

- $a_n - q a_{n-1} - pq a_{n-2} = 0$

(EC) : $x^2 - px - pq = 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= p^2 + 4pq \\ &= 1 - 2p + p^2 + 4p(1-p) \\ &= -3p^2 + 2p + 1 \\ &= -3(p-1)\left(p + \frac{1}{3}\right) \\ &= (p-1)(-1-3p) = (1-p)(3p-1) > 0\end{aligned}$$

$$a_n = \lambda \left(\frac{q + \sqrt{(1-p)(3p+1)}}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{q - \sqrt{(1-p)(3p+1)}}{2} \right)^n$$

Rq : on ajoute des CI qui fonctionnent : $a_0 = \frac{p}{q}$, $a_1 = 0$

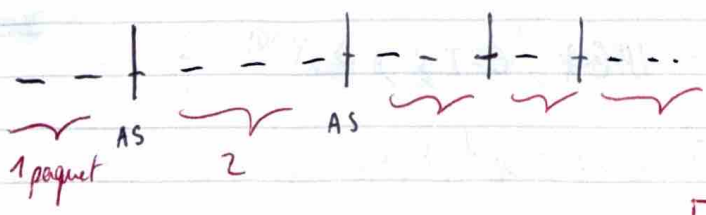
$\underline{n=0}$. on a donc $\lambda + \mu = \frac{p}{q}$

$\underline{n=1}$ $\lambda r_1 + \mu r_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p/q \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où $\lambda = \frac{p}{q}$

1241 (SACHA) On peut voir les as comme des séparateurs



→ 5 paquets

en moyenne, chaque paquet à la même taille : $\boxed{\text{taille} = \frac{52 - \overset{\text{as}}{4}}{5} = 9,6 \text{ cartes}}$