

(1240)

 X_1, X_2 2 v.a.d. (X et Y ds l'énoncé...)

$$X_1(\Omega) = \mathbb{N} = X_2(\Omega)$$

(AUGUSTIN)

hyp: $\forall x, y \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_1 = x, X_2 = y) \neq 0$

rq: $(X_1 + X_2) \perp (X_1 - X_2)$

On a $(X_1 + X_2)(\Omega) = \mathbb{N}, (X_1 - X_2)(\Omega) = \mathbb{Z}$

Pour $k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}$

$$(X_1 + X_2 = k, X_1 - X_2 = l) \subset (X_1 + X_2 + (X_1 - X_2) = k + l) \\ = (2X_1 = k + l)$$

impossible si $k + l < 0$

Si par l'absurde $(X_1 + X_2) \perp (X_1 - X_2)$,

alors $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = k, X_1 - X_2 = l) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) \times \mathbb{P}(X_1 - X_2 = l)$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^k (X_1 = i, X_2 = k-i)\right) \times \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} (X_1 = i+l, X_2 = i)\right)$$

incompatibles
$$= \sum_{i=0}^k \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = k-i)}_{\neq 0} \times \sum_{i=0}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = i+l, X_2 = i)}_{\neq 0}$$

$\neq 0 \quad (\forall (k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z})$
absurde

• si $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{Z}$

$$(X_1 + X_2 = k, X_1 - X_2 = l) \subset (2X_1 = k + l)$$

impossible si $k + l$ impair

et si $(X_1 + X_2) \perp (X_1 - X_2)$, on obtient de même pour $k + l$ impair

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = k, X_1 - X_2 = l) \neq 0 \quad \text{absurde}$$