Exercice 1223 (Nathanaël)

F ind, $(F, \mathcal{P}(F))$ un e.p., P, Q 2 probas

Q domine P si $\forall k \in [\![1, |F|]\!]$,
$\sup\{Q(I), I \subset F, |I| = k\}$
$\geq \sup\{P(I), I \subset F, |I| = k\}$

(a) <u>P qui domine toutes les autres probas ?</u>

$$\boxed{\text{On mq } P \text{ domine toutes les autres probas} \iff \exists\, \omega \in F \text{ tq } P(\omega) = 1}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Par contraposée : si $\nexists$ de tel ω,
$\exists\, \omega' \in F$ tq $P(\omega') \in]0, 1[$
Et donc, pour $k = 1$, on introduit Q tq
$\exists\, \omega \in F$, $Q(\omega) = 1$, alors, $\sup(Q(\omega), \omega \in F)$
$= 1 > \sup(P(\omega), \omega \in F)$
car si $\exists\, \omega \in F$, $P(\omega) = 1$, $P(\omega \cup \omega') = P(\omega) + P(\omega')$
(ω, ω' incompatibles)
Donc $P(\omega') = 0$ IMPOSSIBLE
Donc forcément, <u>$\exists\, \omega \in F$ tq $P(\omega) = 1$</u>

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall k \in [\![1, |F|]\!]$, $\sup(P(I), \ldots\ldots) = 1$
si $\exists\, \omega$ tq $P(\omega) = 1$
<u>et P domine toutes les autres probas</u>

(b) <u>P dominée par toutes les autres probas ?</u>

· F fini : on mq $\forall \omega \in F$, $P(\omega) = \frac{1}{|F|}$

Si $\exists\, \omega \in F$ tq $P(\omega) > \frac{1}{|F|}$,

alors pour $k = 1$, $\sup\{P(\omega), \omega \in F\} > \sup\{Q(\omega), \omega \in F\}$
avec Q tq $\forall \omega \in F$, $Q(\omega) = \frac{1}{|F|}$

Donc $\forall \omega \in F$, $P(\omega) \leq \frac{1}{|F|}$

Et si $\exists\, \omega$ tq $P(\omega) < \frac{1}{|F|}$,

Alors on a $F = \bigcup_{\omega \in F} \omega$ (union incompatible)

donc $P(F) = \sum_{\omega \in F} P(\omega)$

$\iff 1 = \underbrace{\sum_{\omega \in F} P(\omega)}_{|F| \text{ termes}} < \frac{|F|}{|F|}$ PAS POSSIBLE

Donc $\forall \omega \in F$, $P(\omega) = \frac{1}{|F|}$

· <u>F dénombrable</u>

Soit P une proba
$\exists\, \omega' \in F$ tq $P(\omega_0) > 0$
On prend une énumération de F :
$F = \{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}$

On pose Q tq $\forall k \in [\![0, \left\lfloor \frac{1}{2P(\omega)} \right\rfloor]\!]$, $P(\omega_n) = \frac{P(\omega)}{2}$

et $P\left(\omega_{\left\lfloor \frac{1}{2P(\omega)} \right\rfloor + 1}\right) = 1 - \sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{1}{2P(\omega)} \right\rfloor} P(\omega_n)$

On a bien $\forall \omega' \in F$, $P(\omega') < P(\omega)$ et
$\sum_{\omega' \in F} P(\omega') = 1$ (par construction)

On a aussi que P domine Q
car $\sup(P(\omega), \omega \in F) \geq P(\omega) > \sup(Q(\omega), \omega \in F)$

$\Rightarrow$ Pas de proba dominée par toutes les autres