

## 1212 Ulysse

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ep,  $A, B \in \mathcal{A}$

$$\text{mq } |P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$$

$$\langle X, Y \rangle = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

bilinéaire, symétrique, positif à une cste près :  $\langle X, X \rangle = 0 \Leftrightarrow V(X) = 0$

$\Leftrightarrow X = \lambda = \text{cste}$   
presque sûrement

$$\langle X, Y \rangle^2 \leq \langle X, X \rangle \cdot \langle Y, Y \rangle$$

$$(E(XY) - E(X)E(Y))^2 \leq V(X) \cdot V(Y)$$

on pose  $X = 1_A$ ,  $Y = 1_B$

$$E(XY) = E(1_A \cdot 1_B) = E(1_{A \cap B}) = P(A \cap B)$$

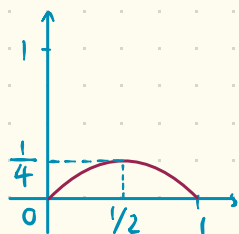
$$E(X)E(Y) = P(A)P(B)$$

$$(P(A \cap B) - P(A)P(B))^2 = (E(1_A 1_B) - E(1_A)E(1_B))^2 \leq V(1_A) \cdot V(1_B)$$

$$\leq P(A) \cdot (1 - P(A)) \cdot P(B) \cdot (1 - P(B))$$

on pose  $f(x) = x(1-x)$

$$\text{d'où } |P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$$



cas d'égalité :

$1_A$  et  $1_B$  en relation affine

$$\Rightarrow \begin{cases} 1_A = 1_B \\ \text{ou} \\ 1_A = 1 - 1_B \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} (A = B \text{ ou } A = \bar{B}) \\ \text{et} \\ P(A) = 1/2 \end{cases}$$