

$2n$ équipes, n en div 1, n en div 2 $\rightarrow n$ matchs

- (i) a_n = proba d'avoir systématiquement équipe div 1 vs équipe div 2
 nombre de cas favorables = nombre d'injections de $[1; n]$ (div 1) dans $[1; n]$ (div 2)
 $= n!$ $\rightarrow$ on ne tient pas compte des permutations

nombre de cas possibles :

$$\binom{2n}{2} \cdot \binom{2n-2}{2} \cdot \dots \cdot \binom{2}{2} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n} \cdot \frac{1}{n!}$$

$\hookrightarrow$ on divise par les permutations

$$a_n = \frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}$$

(ii) par Stirling :

$$a_n \sim \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \cdot 2\pi n \cdot 2^n}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot \sqrt{4\pi n}} \sim \frac{n^{2n} \cdot 2\pi n \cdot 2^n}{(2n)^{2n} \cdot \sqrt{4\pi n}} \sim \frac{2\pi n}{\sqrt{4\pi n} \cdot 2^n} \sim \frac{\sqrt{\pi n}}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$