Exercice 1206 (Nathanaël)

φ une permutation de $[\![1,n]\!]$

proba d'avoir un cycle $\geq \frac{n}{2}$?

A : il y a un cycle $\geq \frac{n}{2}$

B_k : il y a un cycle de longueur k

$A = \bigcup_{i=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{n} B_k$ (union d'ev 2 à 2 incompatibles)

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{n} \mathbb{P}(B_k)$$

Soit $k \in \left[\!\left[\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, n\right]\!\right]$, on calcule $\mathbb{P}(B_k)$

- On sélectionne k éléments parmi n, On leur fait faire un cycle et les autres font une permutation

On a donc $\binom{n}{k}(n-k)!\,N_k$ possibilités

N_k : Nombre de cycles possibles avec k éléments fixés.

$(k-1)(k-2)\cdots\times 1\times 1 = (k-1)!$

Donc on a $\binom{n}{k}(n-k)! \times (k-1)!$ possibilités

N le nb total de cycles $\geq \frac{n}{2}$

$$N = \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n}{k}(n-k)!\,(k-1)! = \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{n} \frac{n!}{k}$$

Or, le nb total de permutations est $n!$

Donc $$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{n!}\sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{n} \frac{n!}{k}$$

$$= \underline{\sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{n} \frac{1}{k}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $$\mathbb{P}_n(A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} \frac{1}{k}$$

$$= \ln(n) + \gamma + o(1) - \ln\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1\right) - \gamma + o(1)$$

$$\underset{n\infty}{\sim} \ln(2)$$

$$\mathbb{P}_n(A) \xrightarrow[n\infty]{} \ln(2)$$