Exercice 1204 (Nathanaël)

(a) $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n-1]\!]$ surjective

On place $n-1$ éléments de manière surjective : $\binom{n}{n-1} \times (n-1)!$ choix

Le dernier élément où on veut : $(n-1)$ choix

Donc on a $\dfrac{(n-1) \times (n-1)! \times n}{2}$ f qui convient

2 → on compte tout $\times 2$

Et donc, $\boxed{p = \dfrac{n!\,(n-1)!}{2(n-1)^n} = \dfrac{n!}{2(n-1)^{n-1}}}$

(b) $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n-2]\!]$

2 cas :

- 2 urnes avec 2 boules : $\binom{n}{n-2} \times (n-2)!$

la fonction est surjective et les 2 dernières boules vont à des endroits différents : $(n-2)(n-3)$

Donc $\dfrac{\binom{n}{n-2}(n-2)! \times (n-2)(n-3)}{4}$ choix

4 → 2 manières d'arriver à chacune des 2 urnes à 2 boules

- 1 urne à 3 boules :

$\binom{n}{n-2} \times (n-2)!$, la fonction est surjective

On choisit 1 endroit pour les 2 dernières : $(n-2)$ choix

On a $\dfrac{\binom{n}{n-2} \times (n-2)! \times (n-2)}{3}$

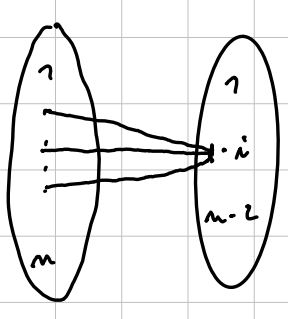
3 → 3 manières de faire 1 urne à 3 boules : A + BC
B + AC
C + AB

En tout, on a : $\dfrac{n!\,(n-2)(n-3)}{8} + \dfrac{n!\,(n-2)}{6}$

Nombre total de fonctions : $(n-2)^n$

Donc $p = \dfrac{\left(\dfrac{n!\,(n-3)}{8} + \dfrac{n!}{6}\right)}{(n-2)^{n-1}}$

Autre Manière : M. Fagebaume



Choix de l'urne i : $n-2$

Choix des 3 boules : $\binom{n}{3}$

$(n-3)!$ bijections entre les éléments restants

$(n-2)\binom{n}{3}(n-3)! = (n-2)\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}(n-3)!$

$= \boxed{\dfrac{n!\,(n-2)}{6}}$