

$\Omega = ((x_1, \dots, x_N), x_i \in \{P, F\})$
 $A = \text{'le nombre de F est pair'}$

'le nombre de F est pair' $\Rightarrow$ nombre de F = $2k$ $k \in \llbracket 0; \lfloor \frac{N}{2} \rrbracket$
on pose

$A_{2k} = \text{'on obtient } 2k \text{ F'}$

proba d'avoir une chaîne (de longueur N) avec $2k$ F:
 $p^{2k} \cdot (1-p)^{N-2k}$

nb de chaînes (de longueur N) avec $2k$ F:

$\binom{N}{2k}$: on choisit $2k$ emplacements

car toutes les chaînes avec $2k$ F sont indépendantes

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{2k}) &= \mathbb{P}(\cup \text{'chaînes distinctes avec } 2k \text{ F'}) \\ &= \binom{N}{2k} \cdot p^{2k} \cdot (1-p)^{N-2k} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} A_{2k}\right) \quad A_{2k} \text{ indépendants}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \binom{N}{2k} p^{2k} \cdot (1-p)^{N-2k}$$

$$(1): \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \binom{N}{2k} p^{2k} \cdot (1-p)^{N-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \binom{N}{2k+1} p^{2k+1} (1-p)^{N-(2k+1)} = (p + (1-p))^N = 1$$

$$(2): \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \binom{N}{2k} (-p)^{2k} (1-p)^{N-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \binom{N}{2k+1} (-p)^{2k+1} (1-p)^{N-(2k+1)} = (1-2p)^N$$

$$(1) + (2): 2 \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \binom{N}{2k} p^{2k} \cdot (1-p)^{N-2k} = 1 + (1-2p)^N$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1 + (1-2p)^N}{2}}$$