

1) $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(a)$ est une paire

on suppose que f convient :

$$f^{-1}(\{0\}) = (x_1; x_2)$$

$$\text{spdg : } x_1 < x_2$$

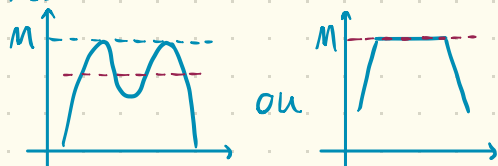
par le TBA, f est bornée sur $[x_1; x_2]$

on pose

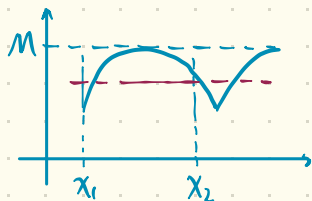
$$M := \max_{[x_1; x_2]} f \quad \text{et } y_1 \in [x_1; x_2] \text{ tq } f(y_1) = M$$

• cas 1 : M est atteint 2 fois sur $[x_1; x_2]$

on a :



• cas 2 : M est atteint une 2^e fois pour $y_2 \notin [x_1; x_2]$



$\Rightarrow$ f n'existe pas

2) $f \in \mathcal{C}^0([0;1]; [0;1])$, $\forall a \in [0;1]$ $f^{-1}(a)$ est une paire

on suppose que f convient :

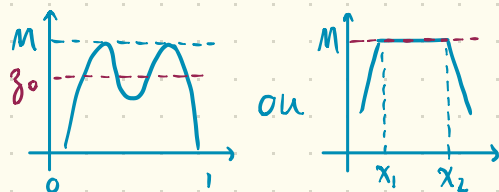
on a $x_1 < x_2$ tq

$$f(x_1) = f(x_2) = M = \max_{[0;1]} f$$

on a $y_1 < y_2$ tq

$$f(y_1) = f(y_2) = m = \min_{[0;1]} f$$

- si $(x_1; x_2) \neq (0;1)$: ça ne marche pas car on a
 - + soit f cste sur $[x_1; x_2]$
 - + soit f_0 atteint au moins 3 fois sur $[0;1]$



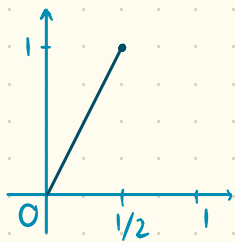
donc $(x_1; x_2) = (0;1)$

• même raisonnement sur $(y_1; y_2)$: nécessairement, $(y_1; y_2) = (0;1)$

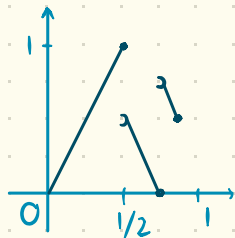
$\Rightarrow f(x_1) = f(y_1)$ i.e. $M = m$, donc f cste sur $[0;1]$ $\rightarrow$ f n'existe pas

3) $f: [0;1] \rightarrow [0;1]$, $\forall a \in [0;1]$ $f^{-1}(a)$ est une paire

on définit f sur $[0; 1/2]$ (cf. schéma)



on veut une bijection $]1/2; 1] \rightarrow [0;1]$

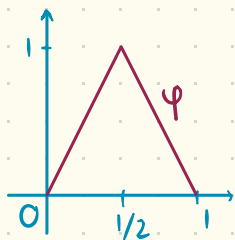


on définit $\forall n \in \mathbb{N}$:
 $f\left(\left[\frac{2^n-1}{2^n}; \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right]\right) \rightarrow \left[\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}; \frac{2^n-1}{2^n}\right]$
 par une fonction affine (cf. schéma)

ainsi on a défini f sur $[0;1[$ et on a atteint $[0;1[$ 2 fois,
 $\{1\}$ 1 fois

on pose $f(1) = 1$: f convient

3) solution alternative (prof):



on pose:
 $\psi(x) = 2x$ si $x \in [0; 1/2]$
 $= 2-2x$ si $x \in [1/2; 1]$

$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow \psi(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

or $\mathbb{Q} \cap [0;1]$ est dénombrable $= \{r_n; n \in \mathbb{N}\}$

• $f(x) = \psi(x)$ si $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0;1]$

• $f(r_0) = f(r_1) = r_0$

$f(r_2) = f(r_3) = r_1$

⋮

$f(r_{2n}) = f(r_{2n+1}) = r_n$

$\Rightarrow$ tout rationnel de $[0;1]$ admet 2 antécédents
 $\hookrightarrow r_n \quad \hookrightarrow r_{2n} \text{ et } r_{2n+1}$

f convient