Soit $x \in [0, \pi[$, on a :

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos t \cos x} \, dt$$

Avec $u = \tan \frac{t}{2}$:

$$F(x) = \int_0^1 \frac{1}{1 + \cos x \, \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}} \, \frac{2 \, du}{u^2 + 1}$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{1}{u^2 + 1 + \cos x (u^2 - 1)} \, du$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1 - \cos x + u^2 (1 + \cos x)} \, du$$

$$= \frac{1}{1 - \cos x} \int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} \, u \right)^2} \, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} \int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}}{1 + (\alpha(x) \times u)^2} \, du \qquad \alpha(x)$$

$$= \frac{1}{\sin x} \left[\operatorname{Arctan}(\alpha(x) u) \right]_0^1$$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{\sin x} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} \right)}$$

<u>Ex 1152 :</u> Antérieure

$q \in]-1, 1[$, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tq $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \; f(x) = (1 - qx) f(qx) \quad (*) \\ f(0) = 0 \end{cases}$

<u>Analyse :</u> Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $(*)$ et $f(0) = 0$

On suppose que f est DSE, on note R le RCV et :

$\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$

Soit $x \in]-R, R[$. Par (*) :

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = (1-qx) \sum_{n\geq 0} a_n q^n x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} a_n q^n x^n - \underbrace{\sum_{n\geq 0} a_n q^{n+1} x^{n+1}}_{= \sum_{n\geq 1} a_{n-1} q^n x^n}$$

$\rightsquigarrow$ par unicité du DSE :

$\forall n \geq 1, \quad a_n = a_n q^n - a_{n-1} q^n$

Ainsi,

$$\forall n \geq 1, \quad \boxed{a_n = \frac{-q^n}{1-q^n} a_{n-1}}$$

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = \frac{\prod_{k=1}^{n} q^k}{\prod_{k=1}^{n} (1-q^k)} a_0 \quad , \text{ avec } f(0) = 1$$

$\|$ donc $a_0 = 1$

D'où :

$$\forall n \geq 1, \quad \boxed{a_n = \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\prod_{k=1}^{n} (1-q^k)}}$$

<u>Synthèse :</u> $\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \geq 1, \quad a_n = \dfrac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\prod_{k=1}^{n} (1-q^k)} \end{cases}$

- Si $q = 0$, $f(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- Sinon, $a_n \neq 0$,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{q^{n+1}}{1-q^{n+1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{donc } RCV\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) = +\infty$$

$|q| < 1$ $\qquad (> 0)$

Finalement,

$\| \; S : x \longmapsto \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, S est $\mathcal{C}^0$, $S(0) = 1$, S DSE

↳ <u>Étape 2</u> : prouver l'unicité

Pour (*), avec $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = (1-qx)\, f(qx)$$
$$= (1-qx)(1-q^2x)\, f(q^2x)$$
$$\vdots$$
$$f(x) = \underbrace{\prod_{k=1}^{n} (1-q^k x)}_{P_n(x)} \underbrace{f(q^n x)}_{\mathcal{C}^0 \text{ par hyp}} \longrightarrow f(0) = 1$$

. Comme x est fixé,

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tq $\forall n \geq n_0$, $(1-q^n x) > 0$

Soit $n > n_0$, on a :

$$P_n(x) = C \prod_{k=n_0+1}^{n} (1-q^k x)$$

$$\ln(\tilde{P}_n(x)) = \sum_{k=n_0+1}^{n} \underbrace{\ln(1-q^k x)}_{\underset{k\to+\infty}{\sim} -q^k x,\ \text{si } x \neq 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Par continuité de l'exp : $\tilde{P}_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\ell}$

$\|P_n(x) \longrightarrow C e^{\ell}$ donc converge bien

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{x \neq 0} : \ f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n x) \\ \text{et donc } \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n x) = 1 + \sum_{n\geq 1} \dfrac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\prod_{k=1}^{n} (1-q^k)} x^n \end{array}}$$

↳ marche encore avec $x = 0$

<u>Exo 1091</u> : le retour Nicolas

On avait montré :