TD 05/02

Ex 1109 (Augustin)

1] Pour $x \in]-R, R[$,

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = x + \sum_{n \geq 2} a_n x^n = x + \sum_{n \geq 2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \right)$$

$$= x + \sum_{n \geq 2} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \right)$$

$$\begin{cases} a_0 a_n = 0 \\ a_n a_0 = 0 \end{cases}$$

Produit de Cauchy :

$$\sum_{n \geq 0} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \right)}_{} x^n = \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right)$$

$$= S(x)^2.$$

Or $\begin{cases} n=0 : 0 \\ n=1 : a_0 a_1 + a_1 a_0 = 0. \end{cases}$

d'où : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = x + S^2(x)$. (*)

2] Soit $x \in]-R, R[$, $S^2(x) - S(x) + x = 0$.

discriminant : $\Delta(x) = 1 - 4x$

On suppose que $R < \frac{1}{4}$.

alors $\Delta(x) \geq 0$, 2 sols :

$S(x) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4x}$.

Or S est $\mathcal{C}^0$ sur $]-R, R[$, donc on ne peut conserver qu'une solution $\forall x$.

Or $S(0) = 0$ donc $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x})$

→ Mq $RCV = \frac{1}{4}$:

• Si par l'absurde, $RCV > \frac{1}{4}$, alors pour $x > \frac{1}{4}$ (*) pas de solution réelle à absurde.

donc $RCV \leq \frac{1}{4}$.

Or, $\forall x \leq \frac{1}{4}$, on a (Δ) avec $x \mapsto \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4x})$ DSE de $RCV = \frac{1}{4}$.

Finalement $R = \frac{1}{4}$

3) Pour $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$,

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n \geq 0} \underbrace{\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\times \cdots \times\left(\frac{1}{2}-n+1\right)\right)(-4x)^n}_{U_n(x)}$$

Pour $n \geq 2$,

$$U_n(x) = \frac{1}{n!}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}(1\times 3\times 5\times \cdots \times 2n-3)\,4^n(-1)^n.$$

$$= \frac{2(-1)^{n-1}}{2^{2n}} \times \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}\,4^n(-1)^n.$$

$$= -2\binom{2n-2}{n-1}\frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad S(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2x}{2} - \left(\frac{-2}{2}\right)\sum_{n\geq 2}\binom{2n-2}{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

$$= x + \sum_{n\geq 2}\binom{2n-2}{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Par unicité du DSE, $\forall n \geq 2$, $a_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

4) $P_n = x_1 \times \cdots \times x_n$

C_n = "nb de bon parenthésages"

avec $\left.\begin{array}{l}(x_1 x_2 x_3) \\ (x_1 x_2) x_3\end{array}\right\}$ = non compté.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$P_n = x_1 \times \cdots \times x_n$.

On fait des paquets de taille k au début.

($k \in [\![1, n-1]\!]$)

$\underline{k=1}$: $(x_1)(x_1 \times \cdots \times x_n)$

$C_1 \times C_{n-1}$

$\underline{k=2}$ $\underbrace{(x_1 x_2)}_{C_2}\underbrace{(x_3 \times \cdots \times x_n}_{C_{n-2}}$

$\vdots$

$\underline{k=n-1}$ $\underbrace{(x_1 \times \cdots \times x_{n-1})}_{C_{n-1}}\underbrace{(x_n)}_{C_1}$.

On partitionne l'ensemble des possibles.

donc

$$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-k} C_k = a_n, \ \forall n \geq 2.$$