TD : 29 janvier

Ex 1091 : Nicolas

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue ; $a, b > 0$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-a, a]$, $f(x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt$

a) $\forall x \in [-b, b]$, $\hat{f}(x) = 0$

$\rightarrow$ <u>Mq $f = 0$:</u>

On a : . $t \mapsto f(t) e^{-ixt}$ est $\mathcal{C}^M$

. $x \mapsto f(t) e^{-ixt}$ est $\mathcal{C}^\infty$

. Soit $p \in \mathbb{N}$, $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\left| \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) \right| = \left| (it)^p f(t) e^{-ixt} \right| = |t|^p |f(t)| = \varphi(t)$$

Or φ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc par le TCD, $\hat{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \boxed{\hat{f}^p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^p f(t) e^{-ixt} dt} \quad (*)$$

Ainsi,

$$\forall x \in [-b, b], \int_{-\infty}^{+\infty} t^p f(t) e^{-ixt} dt = 0$$

$\rightarrow$ avec $x = 0$, $\forall p \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\int_{-a}^{a} f(t) t^p dt = 0$$

D'après l'exo 653, on a : $\boxed{f = 0}$

2) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-b, b]$, $\hat{f}(x) = 0$

$\rightarrow$ <u>Mq $f = 0$:</u>

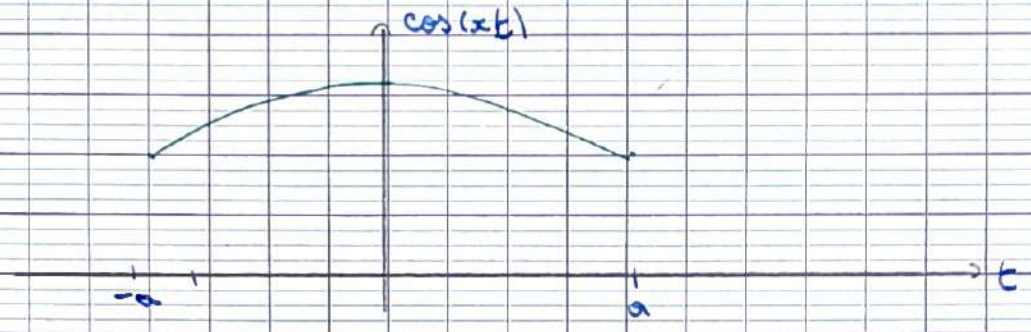
On a par (*) :

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-b, b]$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^p f(t) e^{-ixt} dt = 0$

Ainsi :

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-b, b]$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^p f(t) \cos(tx) dt = 0$,

$\forall p \in \mathbb{N}$, $|x| > b$



cf la fin de la correction p 5 - 6

Ex 955 : Noam

$$F : x \longmapsto \int_0^{\pi/2} \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x \cos t}}_{f(x,t)} dt$$

Cas 1 : $a \in [-1, 1]$ tq $F(a)$ est bien définie

$\rightsquigarrow$ $a \geq 0$:

$f(a, t)$ continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc continue en a.

$\rightsquigarrow$ si $a \in]-1, 0[$:

Alors $1 + a \cos t > 0$

Donc $t \longmapsto \frac{1}{1 + a \cos t}$ continue donc F est définie

$\rightsquigarrow$ si $a = -1$:

$1 - \cos t = 2 \sin^2(\frac{t}{2}) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$

Or $\frac{1}{t^2}$ n'est pas intégrable en 0

tq $a \in]-1, 1]$ $\Rightarrow$ F def tq $\cos x \in]-1, 1]$

tq $x \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1)\pi$

↳ <u>Étape 2</u> : prouver l'unicité

Pour (*), avec $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = (1-qx)\, f(qx)$$
$$= (1-qx)(1-q^2x)\, f(q^2x)$$
$$\vdots$$
$$f(x) = \underbrace{\prod_{k=1}^{n} (1-q^k x)}_{P_n(x)} \underbrace{f(q^n x)}_{\mathcal{C}^0 \text{ par hyp}} \longrightarrow f(0) = 1$$

. Comme x est fixé,

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tq $\forall n \geq n_0$, $(1-q^n x) > 0$

Soit $n > n_0$, on a :

$$P_n(x) = C \prod_{k=n_0+1}^{n} (1-q^k x)$$

$$\ln(\tilde{P}_n(x)) = \sum_{k=n_0+1}^{n} \underbrace{\ln(1-q^k x)}_{\underset{k\to+\infty}{\sim} -q^k x,\ \text{si } x \neq 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Par continuité de l'exp : $\tilde{P}_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\ell}$

$\|P_n(x) \longrightarrow C e^{\ell}$ donc converge bien

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{x \neq 0} : \ f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n x) \\ \text{et donc } \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n x) = 1 + \sum_{n\geq 1} \dfrac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\prod_{k=1}^{n} (1-q^k)} x^n \end{array}}$$

↳ marche encore avec $x = 0$

<u>Exo 1091</u> : le retour Nicolas

On avait montré :

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-b, b]$, $p \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-a}^{a} t^p f(t) \cos xt \, dt = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus [-b, b]$, $\forall t \in [-a, a]$, $g(t) = f(t) \cos xt$

Comme g est continue sur $[-a, a]$, on a $g = 0$.

Donc :

$\forall t \in [-a, a]$, $f(t) \cos xt = 0$

Ainsi $\boxed{\forall t \in [-a, a], \ f(t) = 0}$

<u>Ex 1068</u> : Augustin

$$F : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} \, dt$$

---

a) <u>Définition :</u>

Soit $x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto \dfrac{\arctan xt}{t(1+t^2)}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

→ <u>En $+\infty$:</u> $\left| \dfrac{\arctan xt}{t(1+t^2)} \right| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2t^3}$ qui converge

→ <u>En 0 :</u> $\dfrac{1}{1+u^2} \underset{0}{=} 1 - u^2 + o(u^2)$

$$\arctan u \underset{0}{=} u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$$

$$\left| \frac{\arctan xt}{t(1+t^2)} \right| \underset{t \to 0}{\sim} \frac{|x| t}{t} \longrightarrow |x|$$

Ainsi, $\boxed{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$

<u>F impaire :</u>

$$F(-x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\arctan xt}{t(1+t^2)} \, dt = -F(x)$$

b) On définit :

$$g(x, t) \longmapsto \frac{\arctan xt}{t(1+t^2)}$$

On a :