Ex 1076 Ulysse

Soit $0<a<b$, $F(x)=\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\cos(xt)\,dt$

1) $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$

$\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $x\mapsto \underbrace{f(x,t)}_{\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\cos(xt)}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}(-t\sin(xt))$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\leq \boxed{e^{-at}-e^{-bt}}$$

Intégrable car continue en 0 et $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$, $0<a<b$

donc F est C^1 sur $\mathbb{R}$

et $F'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}\,dt=\int_0^{+\infty}(e^{-at}-e^{-bt})(-\sin(xt))\,dt$

b) Soit $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=\int_0^{+\infty}(e^{-at}-e^{-bt})\,\mathrm{Im}(e^{-ixt})\,dt$

$$=\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}\left(e^{-(a+ix)t}-e^{-(b+ix)t}\right)dt\right)$$

$$=\mathrm{Im}\left(\left[-\frac{e^{-(a+ix)t}}{a+ix}+\frac{e^{-(b+ix)t}}{b+ix}\right]_0^{+\infty}\right)$$

donc $F'(x)=\mathrm{Im}\left(\frac{-1}{b+ix}+\frac{1}{a+ix}\right)$

$$=\mathrm{Im}\left(-\frac{(b-ix)}{b^2+x^2}+\frac{a-ix}{a^2+x^2}\right)$$

$$=\frac{-x}{a^2+x^2}+\frac{x}{b^2+x^2}$$

Donc en intégrant : $\underline{F(x)=\frac{1}{2}\ln(b^2+x^2)-\frac{1}{2}\ln(a^2+x^2)+C}$

c) $F(x)=\int_0^{+\infty}\underbrace{\left[\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right]}_{=G(t)}\overbrace{\cos(xt)}^{\frac{\sin(xt)}{x}}\,dt$

$\underbrace{G(t)}_{g(t)}$

Par IPP, $F(x)=\underbrace{\left[G(t)\frac{\sin(xt)}{x}\right]_0^{+\infty}}_{=0}-\int_0^{+\infty}\frac{g(t)\sin(xt)}{x}\,dt$

on a ; $G(t)=\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}=\frac{(b-a)t}{t}\underset{0}{=}O(1)$

donc $\boxed{F(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} (-g(t)) \sin(xt)\,dt}$

c) D'après la seconde expression de F : $F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+x^2}{a^2+x^2}\right) + C$

$F(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + C$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\left|\frac{\sin(xt)}{xt}\right| \leq 1$ où $h(t) = -g(t) = -G'(t)$

$\left|h(t)\frac{\sin(xt)}{x}\right| \leq h(t) \times t$

<u>Trouver C</u> : On a $F(x) \xrightarrow[x\infty]{} C$

<u>Par les séries entières</u> : $G(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = \frac{\sum_{k\geq 0}^{\infty} \frac{(-at)^k}{k!} - \sum_{k\geq 0} \frac{(-bt)^k}{k!}}{t}$

$G(t) = \sum_{k\geq 1} \frac{(-a)^k - (-b)^k}{k!} t^{k-1}$

$= \sum_{k\geq 0} \frac{(-a)^{k+1} - (-b)^{k+1}}{(k+1)!} t^k$ DSE sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc intégrable au voisinage de 0

<u>Retour</u> : $h(t) \times t = -(b e^{-bt} - a e^{-at}) + \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$

en $+\infty$, on obtient $\boxed{C=0}$

<u>Ex 1063</u> Edgar

$f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$

<u>a) Mq f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$</u>

On applique le TDSAPGVA.

Posons $g : (x,t) \mapsto \frac{e^{-t}}{x+t}$

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x,t)$ est C^∞

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{-e^{-t}}{(x+t)^2}$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \frac{-(-2)e^{-t}}{(x+t)^3}$ et ainsi $\frac{\partial^j g}{\partial x^j}(x,t) = \frac{(-1)^j j! e^{-t}}{(x+t)^{j+1}}$, $\forall j \in \mathbb{N}$