$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-b, b]$, $p \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-a}^{a} t^p f(t) \cos xt \, dt = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus [-b, b]$, $\forall t \in [-a, a]$, $g(t) = f(t) \cos xt$

Comme g est continue sur $[-a, a]$, on a $g = 0$.

Donc :

$\forall t \in [-a, a]$, $f(t) \cos xt = 0$

Ainsi $\boxed{\forall t \in [-a, a], \ f(t) = 0}$

<u>Ex 1068</u> : Augustin

$$F : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} \, dt$$

---

a) <u>Définition :</u>

Soit $x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto \dfrac{\arctan xt}{t(1+t^2)}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.

→ <u>En $+\infty$:</u> $\left| \dfrac{\arctan xt}{t(1+t^2)} \right| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2t^3}$ qui converge

→ <u>En 0 :</u> $\dfrac{1}{1+u^2} \underset{0}{=} 1 - u^2 + o(u^2)$

$$\arctan u \underset{0}{=} u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$$

$$\left| \frac{\arctan xt}{t(1+t^2)} \right| \underset{t \to 0}{\sim} \frac{|x| t}{t} \longrightarrow |x|$$

Ainsi, $\boxed{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$

<u>F impaire :</u>

$$F(-x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\arctan xt}{t(1+t^2)} \, dt = -F(x)$$

b) On définit :

$$g(x, t) \longmapsto \frac{\arctan xt}{t(1+t^2)}$$

On a :

$x \mapsto g(x,t)$ $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\forall t > 0$

$\forall t > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{t(1+t^2)} \cdot \cancel{t} \times \dfrac{1}{1+t^2x^2}$

$$= \frac{1}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}$$

$\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$, intégrable

$t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ par le théorème de dérivabilité, F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \geq 0$

$$\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2} = \frac{1-t^2x^2-x^2(1+t^2)}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} = \frac{1-x^2}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}$$

car impaire, pour $x \in \mathbb{R}_+$

$\rightsquigarrow$ et si $x \neq 1$ et $x = 0$:

$$F'(x) = \frac{1}{1-x^2}\left(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} - x^2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2x^2}\right)$$

avec $tx = u$, $dt = \dfrac{du}{x}$

$\mathcal{C}^1$ et st $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$ car $x > 0$

D'où :

$$F'(x) = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x^2}{x}\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1-x^2}\,\frac{\pi}{2}\,(1-x)$$

et : $\boxed{F'(x) = \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{1}{1+x}}$ $\forall x > 0$, $x \neq 1$

Par cp° de F' en 0 et 1,

$$\forall x \geq 0,\ F'(x) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+x}$$

car F impaire, F paire et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1+|x|}}$$

c) Par le TFI, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F(x) - \underbrace{F(0)}_{=0} = \frac{\pi}{2}\int_0^x \frac{dt}{1+|t|}$$

<u>Si $x \geq 0$:</u>

$$F(x) = \frac{\pi}{2}\int_0^x \frac{dt}{1+t}$$

et $\boxed{F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x) \text{ si } x \geq 0}$

<u>Si $x \leq 0$:</u>

$$F(x) = \frac{\pi}{2}\int_0^x \frac{dt}{1-t}$$

et $\boxed{F(x) = -\frac{\pi}{2}\ln(1-x) \text{ si } x \leq 0}$

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$$

$$F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t}\,\frac{dt}{1+t^2}$$

Soit $\varepsilon > 0$, $A > \varepsilon$

$$\int_\varepsilon^A \frac{\arctan t}{t}\,\frac{dt}{1+t^2} = \left[\frac{\arctan(t)^2}{t}\right]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A \frac{\frac{t}{1+t^2}\arctan t}{t^2}\arctan t\,dt$$

$$\frac{\arctan(\varepsilon)^2}{\varepsilon} \underset{0}{\sim} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} \xrightarrow[0]{} 0$$

$$\frac{\arctan(A)^2}{A} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$$

Et : $F(1) = -\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1(1+t^2)} \arctan t + \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)^2}{t^2} dt$

Et :

$$\boxed{I = 2F(1) = \pi \ln 2}$$

Ex 990 : Simon

$J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x} dx$, $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{ch} x} dx$

$\rightarrow$ existence et calcul

On a :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$I = 2\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x(1+e^{-2x})} = 2\int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x(-1)^k e^{-(2k+1)x} \right) dx$$

$$\frac{1}{1-e^{-2x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-e^{-2x})^k$$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2x e^{-(2k+1)x}$$

$$S_n \xrightarrow{CVS} \frac{x}{\operatorname{ch} x}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k 2x e^{-(2k+1)x} - R_n(x)$$

$$|S_n| \leq \frac{x}{\operatorname{ch} x} + x e^{-(2(n+1)+1)x} \leq x$$

$$I = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x(-1)^k e^{-(2k+1)x} dx$$

$$= 2\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^{+\infty} x e^{-(2k+1)x} dx$$